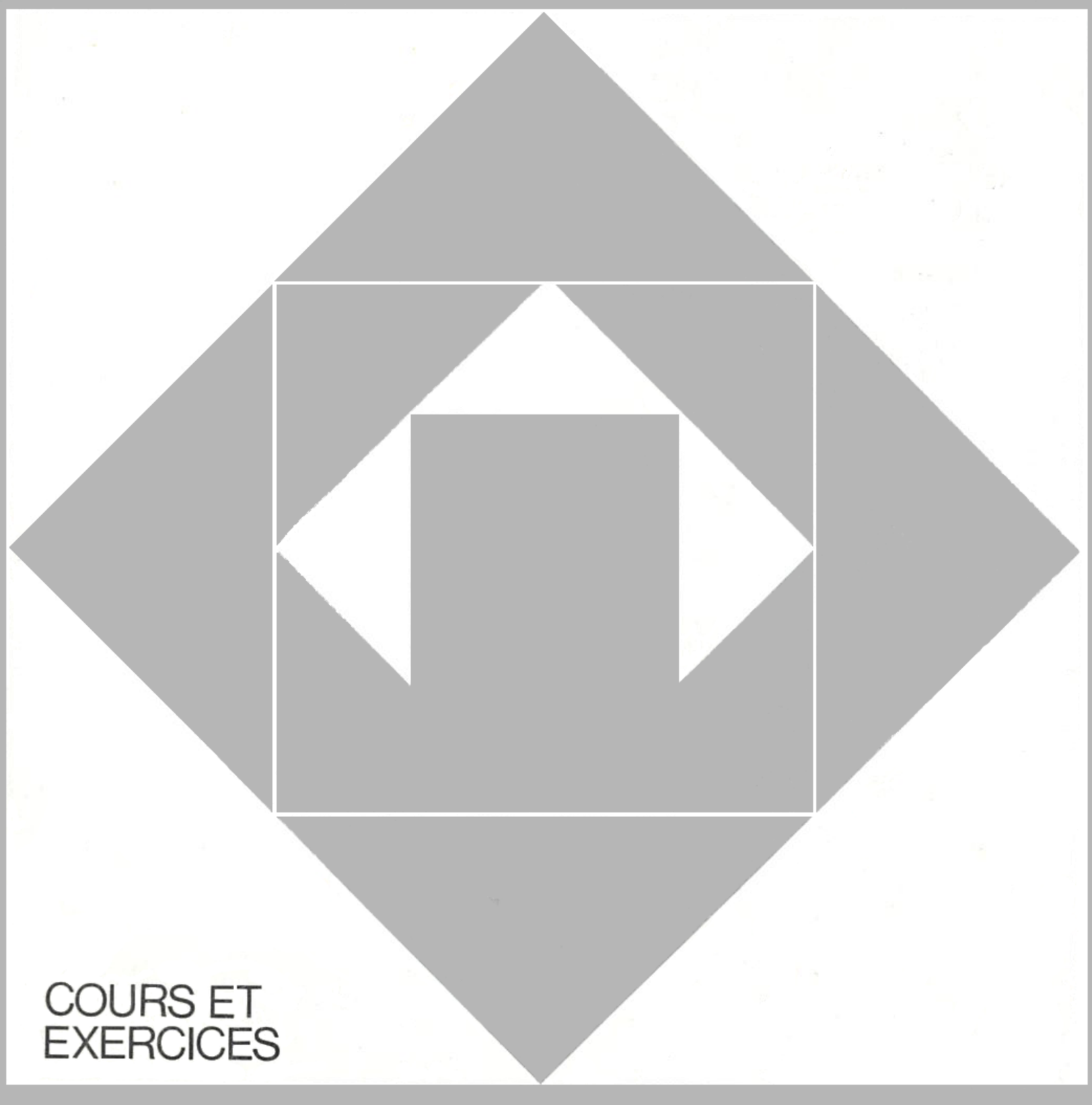
MATHEMATIQUES
1. ANALYSE

ELIE AZOULAY & JEAN AVIGNANT

ENSEIGNEMENT SUPERIEUR TECHNIQUE



COURS ET
EXERCICES

McGRAW-HILL

115

MATHEMATIQUES
1. ANALYSE

Des mêmes auteurs (McGraw-Hill)

E. AZOULAY et J. AVIGNANT, ***Mathématiques :***

t. 2 : ***Analyse***
t. 3 : ***Analyse***
t. 4 : ***Algèbre***
t. 5 : ***Géométrie***

E. AZOULAY, ***Mathématiques, DEUG B :***
2 volumes

Autres ouvrages des auteurs (CDU et SEDES)

E. AZOULAY, *Cours résumé et exercices de mathématiques* à l'usage des étudiants de C.P.E.M., 1re année de pharmacie, préparation des concours AGRO, AGRI, etc., 8e éd. (*épuisé*).

E. AZOULAY, *Cours et exercices de mathématiques* à l'usage des étudiants de C.B. et B.G., 3e éd.

E. AZOULAY et D. COHEN, *Cours et exercices de statistique* à l'usage des étudiants de C.P.E.M., C.B. et B.G. et 1re année de pharmacie, 9e éd.

E. AZOULAY et J. FRIED, *Mathématiques préparatoires aux sciences économiques :*

t. I : *Cours*, 3e éd. (*épuisé*).
t. II : *Exercices corrigés*, 2e éd. (*épuisé*).

E. AZOULAY, M. MESSERI, M. SERFATI, *Cours résumé et exercices de mathématiques :*

t. I : *Analyse* Première partie, 3e éd. (*épuisé*).
t. II : *Analyse* Deuxième partie, 2e éd.
t. III : *Analyse* Troisième partie, 2e éd. (*épuisé*).
t. IV : *Algèbre* Première partie, 2e éd.
t. V : *Algèbre* Deuxième partie, 2e éd. (*épuisé*).
t. VI : *Géométrie* Première partie, 2e éd.
t. VII : *Géométrie* Deuxième partie (*épuisé*).

E. AZOULAY, M. MESSERI, M. SERFATI, *Problèmes de mathématiques* à l'usage des étudiants de M.P., P.C., Math. Sup., IUT (*épuisé*).

ELIE AZOULAY
Professeur à l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs en Electrotechnique et Electronique

JEAN AVIGNANT
Agrégé de l'Université Professeur à l'I.U.T. de Ville-d'Avray

MATHEMATIQUES
1. ANALYSE

COURS ET EXERCICES

2e tirage

McGRAW-HILL

Auckland - Bogota - Hambourg - Johannesburg
Lisbonne - Londres - Madrid - Mexico - Montréal
New Delhi - New York - Panama - Paris - San Juan
Sao Paulo - Singapour - Sydney - Tokyo - Toronto
1985

Maquette de couverture : Françoise Rojare

Copyright © 1983 by McGraw-Hill, Paris

ISBN : 2-7042-1064-0

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans le but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faites sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'Article 40). Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code pénal.

McGraw-Hill — 28 Rue Beaunier — 75014 Paris

AVANT-PROPOS

L'ouvrage que nous présentons ici s'adresse aux étudiants des écoles supérieures techniques, des I.U.T. et aux élèves de certaines écoles d'ingénieurs – celles en particulier pour lesquelles le passage traditionnel par les classes de mathématiques spéciales n'est pas requis – ainsi qu'aux étudiants du premier cycle universitaire.

L'enseignement des Mathématiques a beaucoup évolué durant les deux dernières décennies. Un formalisme plus rigoureux, des concepts plus généraux et de ce fait souvent plus abstraits se sont imposés. Il demeure cependant un domaine où une attention toute particulière doit être apportée à la pédagogie des mathématiques, c'est celui des enseignements à finalité technique. Dans de tels cas, l'axiomatique rigoureuse, le concept général et abstrait cèdent nécessairement le pas au souci de doter l'élève des moyens utiles à faire rapidement usage d'un certain nombre « d'outils mathématiques » lui permettant d'appréhender, par le biais de modèles appropriés, les notions techniques qui constituent l'essentiel de sa formation. D'ailleurs, nos étudiants sont ceux qui ressentent le plus l'ennui des Mathématiques telles qu'elles sont enseignées aujourd'hui. De celles parfaitement agencées de l'enseignement secondaire aux superbes théories de l'enseignement supérieur, le tout constitue bien peut-être un merveilleux édifice sans faille, à cela près qu'il finit souvent par inspirer morosité et ennui.

Notre choix a été celui d'un formalisme restreint que nous croyons être le plus adéquat et le plus apprécié. Nous avons cependant évité de prendre des libertés quant à la rigueur, et de ce fait, tenu à donner les démonstrations de la plupart des théorèmes et formules, n'omettant délibérément, dans un souci d'allègement, que certaines jugées trop complexes.

Chaque chapitre est suivi d'un résumé et de très nombreux exercices, certains entièrement résolus, d'autres comportant seulement la réponse avec des indications sur la méthode, ceci en particulier à l'usage des autodidactes et des étudiants de formation continue.

Ce premier tome reprend les notions de base d'Analyse acquises en terminale, qu'il complète et développe concernant les fonctions d'une variable réelle et les fonctions transcendantes usuelles. Il se poursuit par les chapitres

consacrés à la notion d'intégrale, aux procédés classiques de recherche de primitives, et enfin à l'extension de la notion d'intégrale. Un dernier chapitre porte sur les fonctions de plusieurs variables dont les résultats seront fréquemment mis à profit dans les tomes à venir.

Le tome 2 complète le précédent pour couvrir l'essentiel de l'analyse du premier cycle. On y trouve les équations différentielles, les intégrales multiples, l'intégrale curviligne, les formules intégrales d'analyse vectorielle ainsi que l'étude des suites et séries (numériques et de fonctions).

Le tome 3 d'analyse aborde les compléments traités au niveau du second cycle, tant dans les écoles d'ingénieurs qu'à l'université, des Mathématiques de la Physique et de la technique : fonctions eulériennes, transformations de Laplace et de Fourier, fonctions de Bessel, fonctions spéciales, équations aux dérivées partielles, fonctions d'une variable complexe, etc.

Le tome 4 rassemble les notions classiques d'algèbre, l'algèbre linéaire ainsi que certaines applications à l'analyse et à la géométrie.

Le tome 5 est celui de la géométrie tant analytique qu'infinitésimale : calculs et opérateurs vectoriels, droites et cercles, coniques et quadriques, fonctions vectorielles d'une variable réelle, courbes planes paramétrées, courbes en polaires et, enfin, courbure et torsion et enveloppes des courbes planes et gauches.

Il est évident que le plan suivi n'est pas nécessairement celui des cours tels qu'ils se déroulent chronologiquement et, de ce fait, de nombreux renvois d'un tome à l'autre ont été indispensables.

Les auteurs remercient par avance le lecteur des critiques ou suggestions qu'il voudra bien leur apporter ainsi que les Editions McGraw-Hill pour le soin qu'elles ont apporté à la réalisation de cet ouvrage.

Jean AVIGNANT
Elie AZOULAY

TABLE DES MATIÈRES

1. Généralités sur les fonctions. Limites **1**
1. Notion de fonction 1
2. Notion de limite 2
3. Extensions de la notion de limite 4
4. Propriétés des limites 4
5. Continuité en un point 6
6. Fonction composée 7
7. Fonction paire. Fonction impaire. Fonction périodique 7
8. Notion de fonction inverse ou réciproque 10
9. Fonctions trigonométriques inverses 11
Résumé du chapitre 1 16
Exercices 18

2. Dérivée et différentielle d'une fonction d'une variable **25**
1. Définition de la dérivée 25
2. Signification géométrique de la dérivée 25
3. Exemples de calcul de dérivées 27
4. Dérivée de la somme, du quotient ou du produit de deux fonctions 30
5. Dérivée d'une fonction composée 32
6. Relation liant les dérivées de deux fonctions réciproques 34
7. Fonctions dérivées successives. Formule de Leibniz 36
8. Différentielle d'une fonction d'une variable 37
Résumé du chapitre 2 40
Exercices 41

3. Primitives **47**
1. Définition 47
2. Interprétation géométrique 48
3. Tableau des primitives des fonctions usuelles 50
Résumé du chapitre 3 51
Exercices 51

4. Fonction logarithme **53**
1. Définition de la fonction logarithme népérien de x 53
2. Propriétés de la fonction logarithme 54
3. Étude de la fonction $y = \text{Log } x$ 55
4. Logarithme de base quelconque 57
5. Logarithmes décimaux 58
6. Formule de changement de base 59
7. Dérivée et différentielle logarithmiques 60
Résumé du chapitre 4 60
Exercices 62

5. Fonction exponentielle **69**
1. Définition de la fonction exponentielle de base a ($a \neq 1$) 69
2. Étude de la fonction exponentielle 69
3. Étude de la fonction $y = a^x$ pour les différentes valeurs positives de a 71
4. Croissance comparée des fonctions Log x, a^x, x^m avec $m > 0$ et $a > 1$ lorsque $x \to +\infty$ 73
Résumé du chapitre 5 75
Exercices 76

6. Fonctions hyperboliques directes et inverses **83**
1. Fonctions hyperboliques directes 83
2. Étude des fonctions hyperboliques 84
3. Relations entre les fonctions hyperboliques 88
4. Formules de multiplication ou de division par 2 89
5. Expressions des fonctions hyperboliques en fonction de th $a/2 = t$ 90
6. Fonctions hyperboliques inverses ou réciproques 91
Résumé du chapitre 6 95
Exercices 97

7. Formule de Taylor. Développements limités. Applications **103**
1. Théorème de Rolle 103
2. Formule des accroissements finis 104
3. Applications aux variations de fonctions 106
4. Formule de Taylor 107
5. Formule de Mac Laurin 108
6. Notions sur les développements limités 109
7. Applications à la recherche des limites 116
8. Applications à l'étude des courbes $y = f(x)$ 117
9. Marche à suivre pour l'étude d'une fonction $x \to f(x)$ et construction de son graphe 121
Résumé du chapitre 7 122
Exercices 125

8. Intégrales des fonctions d'une variable **155**
1. Intégrale de Riemann 155
2. Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$ 157
3. Interprétation géométrique 157
4. Propriétés générales de l'intégrale définie 158
5. Théorème de la moyenne 159
6. Inégalité de Schwarz 160
Résumé du chapitre 8 162
Exercices 163

9. Calcul des primitives et des intégrales définies **167**
1. Principes généraux 167
2. Primitives des fractions rationnelles 176
3. Primitives de fonctions trigonométriques ou hyperboliques 185
4. Primitives de fonctions algébriques non rationnelles 189
5. Calcul numérique approché d'une intégrale définie 193
Résumé du chapitre 9 200
Exercices 204

10. Intégrales généralisées **219**
1. Introduction et définitions 219
2. Intégrales du type $\int_a^b f(x)\,dx,\ f(x) \underset{x\to b}{\to} +\infty$ 222
3. Intégrales du type $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 225
Résumé du chapitre 10 229
Exercices 230

11. Fonctions de plusieurs variables réelles **245**
1. Notions générales. Dérivées partielles 245
2. Fonction composée. Formule de Taylor. Différentielle 251
Résumé du chapitre 11 262
Exercices 266

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS. LIMITES

1. NOTION DE FONCTION

$f(x)$ est une fonction de la variable x si à toute valeur de x choisie dans un ensemble convenable E, $f(x)$ fait correspondre une valeur bien déterminée y d'un ensemble F.

x est la variable ou *l'argument*, y est *l'image*. F est *l'ensemble des valeurs de* $f(x)$. L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ prend des valeurs bien déterminées est l'ensemble de définition de la fonction $f(x)$.

Bien que $f(x)$ réalise une application de E dans F, on préfère dans certains cas employer le terme de fonction : il en est particulièrement ainsi lorsque E et F sont tous deux l'ensemble des nombres réels (ou en sont un sous-ensemble).

Exemples.

$x \to f(x) = 2x$, E et F : ensemble des nombres réels.

$x \to f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ E : ensemble des nombres réels.

F : ensemble des nombres $\geqslant 1$.

Intervalles

a et b étant deux nombres réels quelconques, on appelle intervalle (a, b) l'ensemble des nombres compris entre a et b.

Plus précisément :

– L'intervalle *ouvert*, qu'on note $]a, b[$ est l'ensemble des nombres x vérifiant $a < x < b$.

– L'intervalle *fermé* ou segment qu'on note $[a, b]$ est l'ensemble des nombres x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.

De même on désigne par les notations :

$[a, b[$ *l'intervalle fermé à gauche et ouvert à droite* $(a \leqslant x < b)$.

$]a, b]$ *l'intervalle ouvert à gauche et fermé à droite* $(a < x \leqslant b)$.

Graphe

On associe à une fonction $f(x)$ une représentation graphique ou graphe. Ox et Oy étant un système d'axes de référence, on construit pour toute valeur x_0 appartenant à l'intervalle où $f(x)$ est définie le point M_0 de coordonnées x_0, $f(x_0)$.

L'ensemble des points obtenus constitue le graphe de $f(x)$.

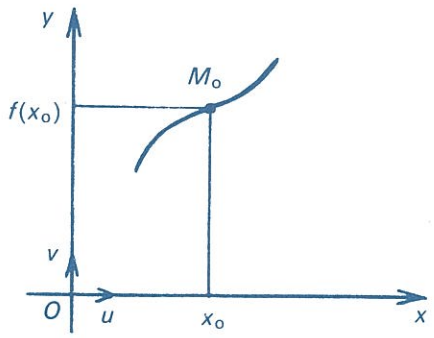


Figure 1.

2. NOTION DE LIMITE

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x définie sur l'intervalle $[a, b]$ (sauf éventuellement pour la valeur x_0). On dit que $f(x)$ a pour limite L lorsque x tend vers x_0, si en donnant à x des valeurs suffisamment rapprochées de x_0, on rend $f(x)$ aussi proche de L que l'on veut. Plus précisément :

On dit que $y = f(x)$ tend vers une limite L lorsque x tend vers x_0, si à tout nombre positif ε (arbitrairement petit) il est possible de faire correspondre un nombre $\eta > 0$ tel que

$$0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

on écrit :

$$\lim_{x \hookrightarrow x_0} f(x) = L.$$

Interprétation graphique de la définition de limite

Soit (C) le graphe de $f(x)$.

Menons deux droites D et D' parallèles à Ox et d'ordonnées $L + \varepsilon$ et $L - \varepsilon$, et deux droites Δ et Δ' parallèles à Oy et d'abscisse $x_0 + \eta$ et $x_0 - \eta$.

La définition ci-dessus signifie que le nombre ε étant donné (arbitrairement petit) il est possible de déterminer le nombre positif η de sorte que tout point de la courbe C situé entre Δ et Δ' soit également situé entre D et D'.

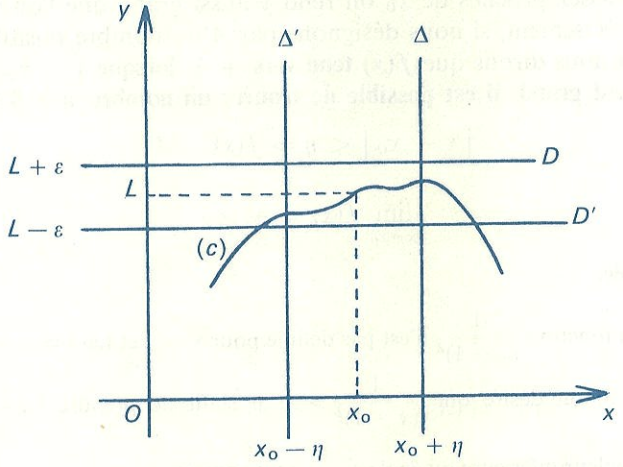


Figure 2.

Exemple.

La fonction $y = 2x - 1$ est définie $\forall x$.

Pour $x_0 = 2$, $y_0 = f(x_0) = 3$. Supposons que nous choisissions $\varepsilon = \dfrac{1}{10^6}$.

Quelle valeur correspond pour η ?

$|y - 3| < \varepsilon$ soit $|2x - 4| < \varepsilon$ entraîne : $|x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Par conséquent toute valeur inférieure à $\dfrac{\varepsilon}{2} = 5.10^{-7}$ convient pour η.

Remarque.

Une fonction peut avoir deux limites différentes lorsque x tend vers x_0 par valeurs supérieures à x_0 (limite à droite) ou par valeurs inférieures à x_0 (limite à gauche).

Soit par exemple la fonction

$$f(x) = 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

$f(x)$ est définie $\forall x \neq 0$.

Si $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$. Lorsque $x \to 0$ par valeurs positives nous avons

$$\lim_{x \to +0} f(x) = 2.$$

Si $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$ et $\lim_{x \to -0} f(x) = 0$.

Les limites à droite et à gauche pour la valeur 0 sont distinctes.

3. EXTENSIONS DE LA NOTION DE LIMITE

On dit que y tend vers l'infini lorsque x tend vers x_0, si en donnant à x des valeurs assez proches de x_0 on rend y aussi grand que l'on veut.

Plus précisément, si nous désignons par A un nombre positif arbitrairement grand nous dirons que **$f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to x_0$, si $\forall\, A > 0$ arbitrairement grand, il est possible de trouver un nombre $\eta > 0$ tel que**

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

on écrit :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Exemple.

La fonction $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ n'est pas définie pour $x = 1$ et tend vers $+\infty$ lorsque $x \to 1$. Si on désire que $\dfrac{1}{(x-1)^2} > A$, il suffit de prendre $|x - 1| < \dfrac{1}{\sqrt{A}}$.

Toute valeur inférieure ou égale à $\dfrac{1}{\sqrt{A}}$ peut convenir pour η.

De même $y \to -\infty$, lorsque $x \to x_0$ si à toute valeur $A > 0$ et arbitrairement grande, on peut faire correspondre une valeur η telle que

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < -A,$$

on écrit :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

4. PROPRIÉTÉS DES LIMITES

Supposons que x tendant vers x_0, $f(x)$ et $g(x)$ tendent respectivement vers L et M, dans ces conditions :

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L}{M} \qquad \text{si} \quad M \neq 0$$

$$\lim_{x \to x_0} a \cdot f(x) = a \cdot L \qquad a : \text{constante quelconque}$$

Ces propriétés se démontrent sans difficultés.

Notion de forme indéterminée

Le tableau ci-dessus sera général si on précise les cas particuliers où les limites de $f(x)$ et $g(x)$ sont nulles ou infinies.

Ainsi :

si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ $\begin{cases} \lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty \\ \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = +\infty \\ \dfrac{f(x)}{g(x)} \ ? \end{cases}$

il est impossible *a priori* de prévoir le comportement du rapport qui est une forme indéterminée.

Tous les cas d'indétermination peuvent être résumés dans le tableau ci-dessous, en supposant L et M différents de 0.

Si dans certaines conditions		Dans les mêmes conditions		
$f(x)$ tend vers	$g(x)$ tend vers	$f(x) + g(x)$ tend vers	$f(x) \cdot g(x)$ tend vers	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers
∞	M	∞	∞	∞
L	∞	∞	∞	0
$+\infty$	$-\infty$	**forme indéterminée** $\infty - \infty$	$-\infty$	**forme indéterminée** $\dfrac{\infty}{\infty}$
0	∞	∞	**forme indéterminée** $\mathbf{0} \times \infty$	0
∞	0	∞	**forme indéterminée** $\mathbf{0} \times \infty$	∞
0	0	0	0	**forme indéterminée** $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$

Dans les cas d'indétermination, une étude directe permet de « *lever l'indétermination* ».

■ **Exemple 1.** $y = \dfrac{x^3 - a^3}{x - a}$

Pour $x = a$, y se présente sous la forme $\dfrac{0}{0}$.

Cependant $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$

et $y = x^2 + ax + a^2$

$y(a) = 3a^2.$

■ **Exemple 2.**

$$y = \frac{\cos x - \cos a}{\sin x - \sin a}$$

Pour $x = a$, y se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Mais y peut être remplacé par

$$\frac{-\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}} = -\operatorname{tg}\frac{x+a}{2}$$

et $y(a) = -\operatorname{tg} a$.

■ **Exemple 3.**

$$y = \sqrt{x^2 + x} - x$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, y se présente sous la forme indéterminée $\infty - \infty$. Si nous multiplions et divisons par la quantité conjuguée $\sqrt{x^2 + x} + x$ nous obtenons :

$$y = \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, y tend vers $1/2$.

5. CONTINUITÉ EN UN POINT

On dit que la fonction $f(x)$ est continue pour la valeur $x = x_0$ (ou au point x_0) si :

$f(x)$ est définie pour $x = x_0$ $\quad$ ($f(x_0)$ existe)

$f(x) \to f(x_0)$ lorsque $x \to x_0$.

Les propriétés des limites (paragraphe précédent) conduisent aux conclusions suivantes :

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions continues au point x_0, il en est de même de $f(x) + g(x)$, $af(x)$, $f(x).g(x)$ et si $g(x) \neq 0$, de $\frac{f(x)}{g(x)}$.

6. FONCTION COMPOSÉE

Soient u et f deux fonctions numériques de la variable réelle, et x une valeur de celle-ci pour laquelle $u(x)$ est définie et vaut α.

$f(\alpha)$ sera défini si α appartient au domaine de définition de f.

Par ce procédé on associe à x un nombre réel $f(u(x))$ et on définit la nouvelle fonction $F(x)$ par :

$$x \to u(x) \to f(u(x)) = F(x)$$

on note également

$$F = f \circ u.$$

Exemple :

$$x \to u(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

est définie $\forall\, x \in]0, 1]$

$$u \to f(u) = 1 + 2u - u^2 = 1 + 2\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \frac{1-x}{x}$$

est également définie $\forall\, x \in]0, 1]$.

Propriété importante.

Si la fonction u est continue pour $x = x_0$ et si la fonction f est continue pour $u = u_0 = f(x_0)$, alors la fonction composée $F = f \circ u$ est également continue pour $x = x_0$.

7. FONCTION PAIRE. FONCTION IMPAIRE. FONCTION PÉRIODIQUE

On dit que $f(x)$ est une fonction paire si $f(-x) = f(x)$.

Exemples.

$$x^2,\ \cos x,\ \sin^2 x,\ \frac{x - \sin x}{x \cos x}$$

sont des fonctions paires.

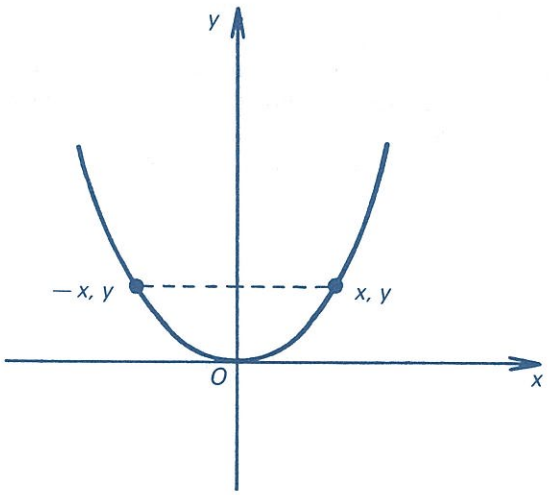
$f(x)$ est impaire si $f(-x) = -f(x)$.

Exemples.

$\sin x$, $\operatorname{tg} x$, x^{2n+1} sont des fonctions impaires.

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe Oy : deux points d'abscisses opposées ont même ordonnée. Lors de l'étude d'une

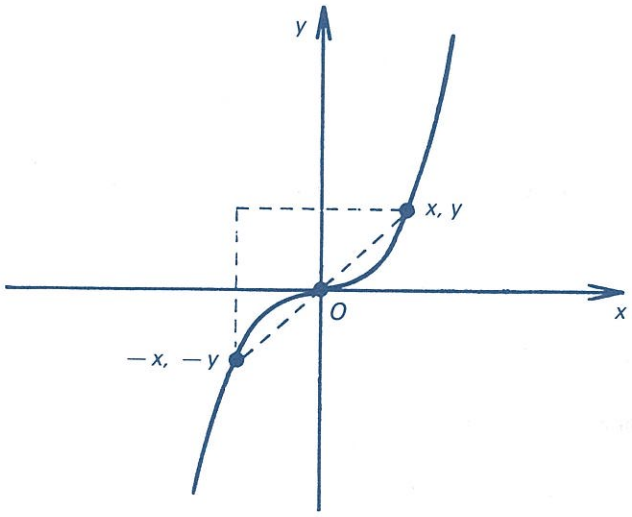
telle fonction, les considérations de symétrie permettent de réduire l'intervalle de l'étude.



Fonction paire

Figure 3.

De même le graphe d'une fonction impaire admet l'origine comme centre de symétrie.



Fonction impaire

Figure 4.

Remarquons enfin qu'un autre type de symétrie est présenté par les fonctions $y = f(x)$ invariantes par le changement simultané de x en y et de y en x : en effet les points $M(x, y)$ et $M'(y, x)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

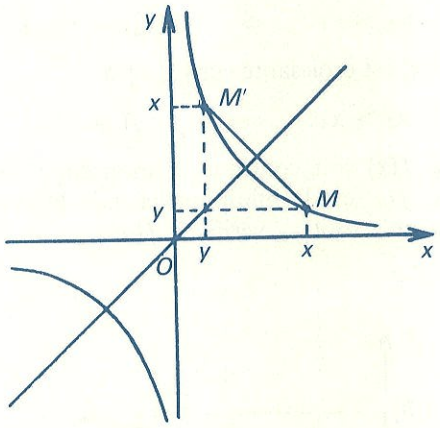


Figure 12.

C'est le cas par exemple de $y = \dfrac{1}{x}$.

On dit qu'une fonction $f(x)$ est périodique s'il existe un nombre positif T tel que

$$f(x + T) = f(x)$$

T est la période de la fonction $f(x)$.

La relation précédente permet de vérifier que $\forall\ K$, entier KT est également période : $f(x + KT) = f(x)$.

Cependant lorsqu'on parle de période, on sous-entend la plus petite de toutes les périodes.

Exemple.

Soit la fonction

$$f(x) = \sin 5x.$$

Nous avons $\sin [5(x + 2\pi)] = \sin (5x + 10\pi) = \sin 5x$, $f(x)$ admet 2π pour période. Mais 2π n'est pas la plus petite des périodes. En effet $\sin 5x$ ne change pas de valeur si $5x$ augmente de 2π soit, si x augmente de $\dfrac{2\pi}{5} : \dfrac{2\pi}{5}$ est la période de $\sin 5x$.

8. NOTION DE FONCTION INVERSE OU RÉCIPROQUE

On dit que la fonction $f(x)$ est *strictement* croissante ou *monotone* croissante sur l'intervalle $[a, b]$ si

$$x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1)$$

Une fonction $f(x)$ est croissante sur $[a, b]$ si

$$x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) \geqslant f(x_1)$$

Supposons que $f(x)$ soit continue et monotone croissante sur $[a, b]$. Dans ces conditions $f(a)$ est le minimum et $f(b)$ le maximum de $f(x)$ sur $[a, b]$. Il est évident qu'à tout y_0 vérifiant $f(a) < y_0 < f(b)$ correspond une

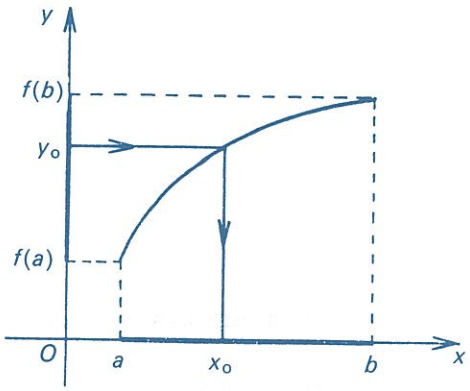


Figure 6.

seule valeur x_0 comprise entre a et b et telle $y_0 = f(x_0)$. Cette correspondance $y_0 \to x_0$ réalise une application du segment $[f(a), f(b)]$ sur le segment $[a, b]$ nous l'appellerons fonction réciproque ou inverse de f et nous noterons

$$x = g(y)$$

Ainsi :

$$y = f(x) \quad \text{et} \quad a \leqslant x \leqslant b \quad \text{équivaut à} \quad x = g(y) \quad \text{et} \quad f(a) \leqslant y \leqslant f(b).$$

On démontre sans difficultés que la fonction $g(y)$ est également continue et monotone croissante sur $[f(a), f(b)]$.

Remarque.

g admet f pour fonction inverse : g et f sont inverses l'une de l'autre. On utilise parfois la notation f^{-1} pour désigner la fonction inverse de f.

Graphes de 2 fonctions inverses

Soit $M(x, y)$ un point du graphe de la fonction $y = f(x)$ rapporté à un système d'axes rectangulaires sur lesquels on a choisi une même unité de longueur.

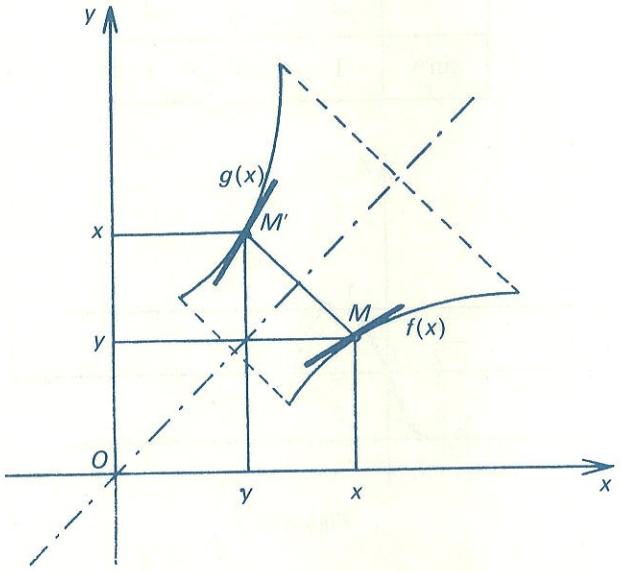


Figure 7.

Le point M' d'abscisse y et d'ordonnée x appartient au graphe de la fonction inverse $g(x)$: **les graphes de deux fonctions inverses sont symétriques par rapport à la première bissectrice.**

9. FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES INVERSES

Fonction $y =$ Arc sin x

La fonction $y = \sin x$ est définie, continue et strictement croissante de -1 à $+1$ sur le segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Sa fonction inverse (arc dont le sinus est x) sera définie sur le segment $[-1, +1]$ et prendra ses valeurs sur le segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On la désigne par la notation Arc sin x :

$$y = \text{Arc sin } x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Des variations de la fonction $y = \sin x$, on déduit celles de Arc sin x.

Variations de sin x

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	-1	↗	0	↗	1

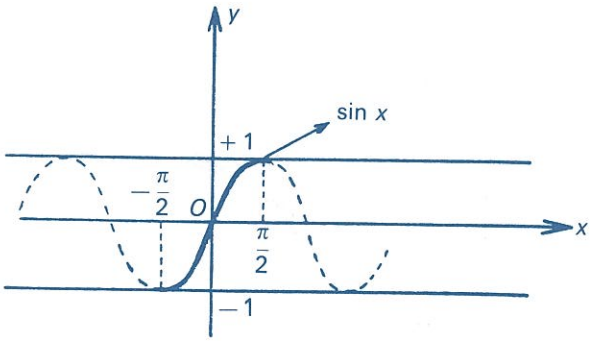


Figure 8.

Variations de Arc sin x.

x	-1		0		1
Arc sin x	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

$(\text{Arc sin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

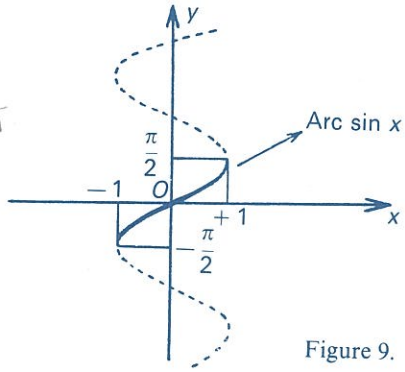


Figure 9.

Fonction $y = \text{Arc cos } x$

La fonction $y = \cos x$ est définie continue et strictement décroissante sur le segment $[0, \pi]$ où elle décroît de $+1$ à -1 sa fonction inverse (arc dont le cosinus est x) est continue et décroissante sur le segment $[-1, +1]$ et prend ses valeurs sur le segment $[0, \pi]$; on la désigne par la notation Arc cos x

$$y = \text{Arc cos } x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{cases}$$

Des variations de $y = \cos x$, on déduit celles de $y = \text{Arc cos } x$.

Variations de $y = \cos x$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	1	↘	0	↘	-1

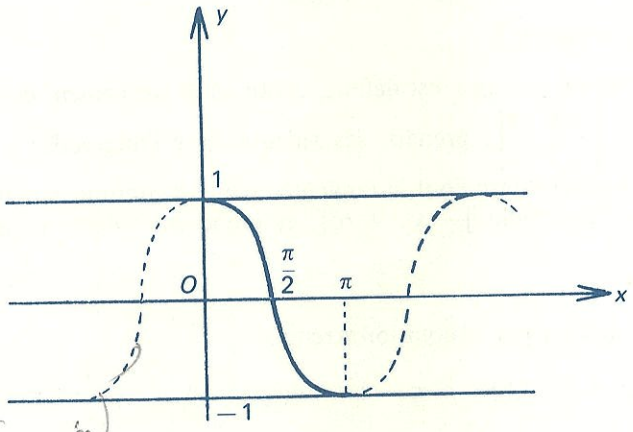


Figure 10.

Variations de $y = \text{Arc cos } x$.

x	-1		0		1
Arc cos x	π	↘	$\frac{\pi}{2}$	↘	0

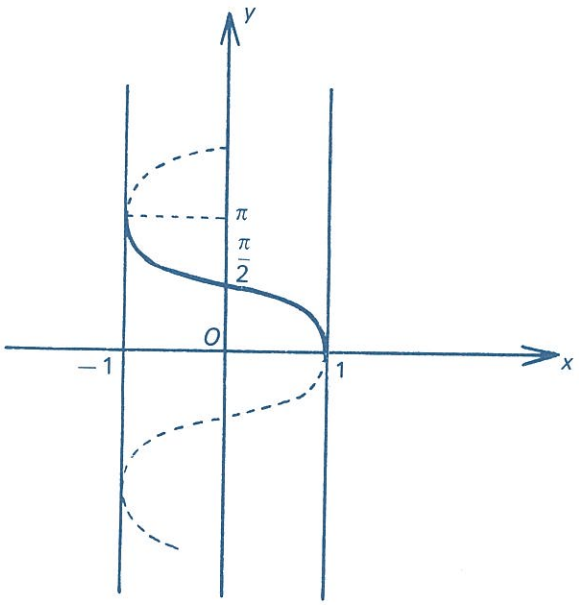


Figure 11.

Fonction $y = \text{Arc tg } x$

La fonction $y = \text{tg } x$ est définie, continue et strictement croissante dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, prenant ses valeurs dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. Sa fonction inverse (arc dont la tangente est x) est continue strictement croissante dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, et prend ses valeurs dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On la désigne par la notation Arc tg x :

$$y = \text{Arc tg } x \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{tg } y \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

Des variations de $y = \text{tg } x$ on déduit celles de $y = \text{Arc tg } x$.

Variations de $y = \text{tg } x$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
tg x	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

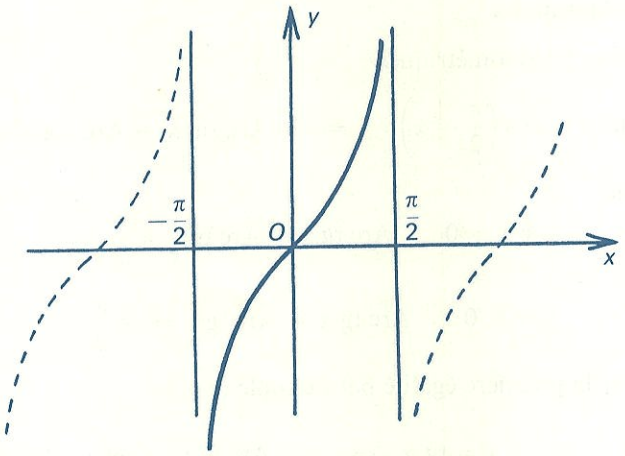


Figure 12.

Variations de $y = \text{Arc tg } x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Arc tg x	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

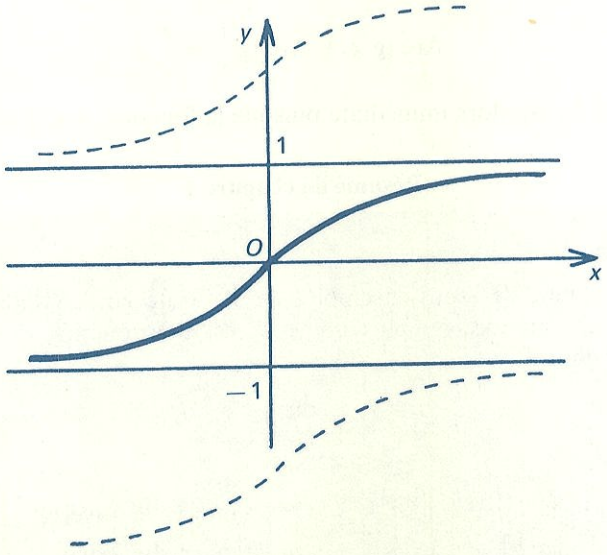


Figure 13.

Relations fondamentales

Les égalités trigonométriques :

$$x = \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \Rightarrow \quad \text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x = \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

De même :

$$\text{si } x > 0 \qquad \text{Arc tg } x + \text{Arc tg } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

$$\text{si } x < 0 \qquad \text{Arc tg } x + \text{Arc tg } \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \qquad (3)$$

Montrons la première égalité par exemple :

$$\text{si } x > 0 \quad \text{et} \quad x = \text{tg}\,\alpha \Leftrightarrow \alpha = \text{Arc tg } x \quad \text{et} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{1}{x} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

De la dernière égalité on tire :

$$\text{Arc tg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$= \frac{\pi}{2} - \text{Arc tg } x$$

soit

$$\text{Arc tg } x + \text{Arc tg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

L'égalité (3) est alors immédiate puisque la fonction Arc tg x est impaire.

Résumé du chapitre 1

- **Définition.**

E et F étant des sous-ensembles de $\mathbf{R}$, toute correspondance qui à $x \in E$ fait correspondre au plus un $y \in F$ est une fonction définie sur E et à valeurs dans F.

On note : $x \xrightarrow{f} y$ ou $y = f(x)$

- **Intervalles.**

$]a, b[\leftrightarrow \{ x \mid a < x < b \}$: intervalle ouvert

$[a, b] \leftrightarrow \{ x \mid a \leqslant x \leqslant b \}$: intervalle fermé

● **Graphe.**

Le graphe de la fonction $x \to f(x)$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ où $x \in E$ et $f(x) \in F$.

● **Limite.**

$$f(x) \to L \quad \text{lorsque} \quad x \to x_0$$

si $\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \eta > 0$

tel que :

$$0 < |x - x_0| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

On note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \text{ou encore} \qquad f(x) \underset{x \to x_0}{\to} L.$$

● **Propriétés des limites.**

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l + m$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \,.\, g(x)] = l \,.\, m$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{l}{m} \quad \text{si} \quad m \neq 0.$$

● **Formes indéterminées.**

Si l et m sont infinis ou nuls les quantités précédentes peuvent se présenter sous l'une des quatre formes indéterminées suivantes :

$$\infty - \infty, \; 0 \,.\, \infty, \; \frac{\infty}{\infty}, \; \frac{0}{0}$$

● **Continuité.**

$f(x)$ est continue pour $x = x_0$.

si $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$

● **Fonction composée.**

Si

$$x \to u(x), \quad \text{et} \quad u(x) \to f(u(x)) = F(x)$$

on dit que F est une fonction composée de x et se note $F = f \circ u$.

La continuité de u et de f entraîne celle de F.

● **Fonction paire.**

$$f(x) = f(-x)$$

● **Fonction impaire.**

$$f(x) = -f(-x)$$

● **Fonction périodique.**

$$f(x + T) = f(x)$$

● **Fonction inverse ou réciproque.**

– Dans tout intervalle $[a, b]$ où f est une fonction continue et strictement monotone, on peut définir sa fonction inverse ou réciproque g :

$$x_0 \in [a, b] \quad \text{et} \quad f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow x_0 = g(y_0) \quad \text{et} \quad y_0 \in [f(a), f(b)]$$

Les graphes de deux fonctions inverses sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

EXERCICES

■ **1.** Pour quelles valeurs de x la fonction

$$y = \frac{|x - 3| + x - 1}{|x - 1| + x - 3}$$

est-elle définie et continue ? Tracer son graphe.

Si $x \geqslant 3$, $|x - 3| = x - 3$ et $|x - 1| = x - 1$.
Si $x \leqslant 1$, $|x - 3| = 3 - x$ et $|x - 1| = 1 - x$.
Enfin si $1 \leqslant x \leqslant 3$, $|x - 3| = 3 - x$ et $|x - 1| = x - 1$.

Il faut donc distinguer trois cas :

$$x \in]-\infty, +1] \qquad y = \frac{3 - x + x - 1}{1 - x + x - 3} = -1$$

$$x \in [+1, +3] \qquad y = \frac{3 - x + x - 1}{x - 1 + x - 3} = \frac{1}{x - 2}$$

$$x \in [+3, +\infty[\qquad y = \frac{x - 3 + x - 1}{x - 1 + x - 3} = 1.$$

La fonction y est continue pour $x = 1$ et $x = 3$ car

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x - 2}\right) = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{x - 2}\right) = +1.$$

Par contre y n'est pas définie pour $x = 2$. Lorsque x tend vers 2 par valeurs positives $y \to +\infty$.

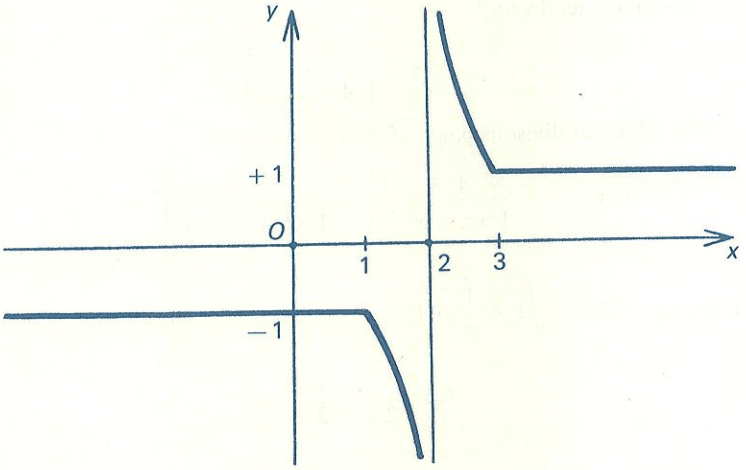


Figure 14.

2. Calculer les limites suivantes :

a) $$l_1 = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$$

b) $$l_2 = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$$

c) $$l_3 = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$$

d) $$l_5 = \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$$

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$ admet pour racines 1 et 4, donc

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4} = \frac{\sqrt{x} - 2}{(x-1)(x-4)} = \frac{\sqrt{x} - 2}{(x-1)(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$$
$$= \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x} + 2)}$$

quantité qui tend vers $\frac{1}{12}$ lorsque x tend vers 4.

b) Multiplions et divisons par la quantité conjuguée du numérateur :

$$\frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{x + 3 - 4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2}$$

Lorsque x tend vers 1,

$$l_2 = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

c) Multiplions et divisons par $\sqrt{x^2 + x} + x$

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x}$$

lorsque $x \to +\infty$, $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \to 1$

et
$$l_3 = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

d)
$$\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} = \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{(x-a)(x+a)} = \frac{x^2 + ax + a^2}{x + a}$$

et
$$l_5 = \frac{a^2 + a^2 + a^2}{a + a} = \frac{3}{2}a.$$

■ **3.** On considère la fonction

$$y = \frac{a \sin 3x}{\cos x}$$

Quelle est la période de cette fonction ? Quelles symétries présente-t-elle ? En déduire l'intervalle d'étude.

Sin 3 x est périodique et de période $\frac{2\pi}{3}$; cos x a pour période 2 π : y est donc périodique et de période 2 π.

Le changement de x en $-x$ change y en $-y$: y est une fonction impaire, donc symétrique par rapport à l'origine; cette première symétrie permet de réduire l'intervalle de variation à $[0, \pi]$.

Le changement de x en $\pi - x$ ne change pas sin 3 x car

$$\sin 3(\pi - x) = \sin(\pi - 3x) = \sin 3x ; \cos(\pi - x) = -\cos x$$

donc

$$y(\pi - x) = -y(x)$$

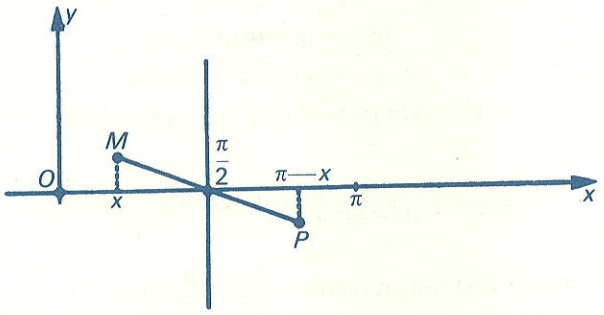


Figure 15.

Donc les deux points d'abscisses x et $\pi - x$ sont symétriques par rapport au point

$$\left(x = \frac{\pi}{2}, y = 0\right)$$

Cette seconde symétrie permet de réduire à nouveau de moitié l'intervalle de variation qui sera donc

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

■ **4.** Parmi les fonctions suivantes, quelles sont les fonctions paires ou impaires

$$y_1 = \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3 \cos x} \qquad y_2 = \frac{\sin^2 2x - \cos 3x}{\operatorname{tg} x}$$

$$y_3 = x^2 - 1 + \sin^2 x \qquad y_4 = \frac{x - 1}{\sin(x + 1)} + \cos x$$

$$y_5 = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{x \operatorname{tg} x} \qquad y_6 = \frac{x^3 + 1}{x + 1} \operatorname{tg} x$$

Réponse : y_1, y_3, y_5 paires
y_2 impaire
y_4, y_6 ni paires, ni impaires.

■ **5.** Simplifier les expressions

$$y_1 = \cos (3 \text{ Arc tg } x)$$
$$y_2 = \cos^2 \left(\frac{1}{2} \text{ Arc tg } x \right)$$

---

a) Soit $y_1 = \cos (3 \text{ Arc tg } x)$. Nous exprimerons d'abord $\cos 3u$ en fonction de $\cos u$, c'est-à-dire y, en fonction de $\cos (\text{Arc tg } x)$, puis $\cos u$ en fonction de

$$\text{tg } u = \text{tg } (\text{Arc tg } x) = x$$
$$\cos 3u = 4 \cos^3 u - 3 \cos u$$
$$y_1 = 4 [\cos (\text{Arc tg } x)]^3 - 3 \cos (\text{Arc tg } x)$$

on a

$$\cos^2 u = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 u} \quad \text{soit} \quad \cos u = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 u}}$$

Mais $u = \text{Arc tg } x$ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Donc $\cos u > 0$ et

$$\cos (\text{Arc tg } x) = \frac{+1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 [\text{Arc tg } x]}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Donc

$$y_1 = \frac{4}{(1 + x^2)^{3/2}} - \frac{3}{(1 + x^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \left[\frac{4}{1 + x^2} - 3 \right]$$
$$y_1 = \frac{1 - 3x^2}{(1 + x^2)^{3/2}}$$

b) $$y_2 = \cos^2 \left(\frac{1}{2} \text{ Arc tg } x \right)$$

On a

$$\cos^2 z = \frac{1 + \cos 2z}{2}$$

$$y_2 = \frac{1 + \cos (\text{Arc tg } x)}{2} = \frac{1 + \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}}{2} \text{ (voir plus haut)}$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{1 + x^2} + 1}{2\sqrt{1 + x^2}}$$

■ **6.** On considère la fonction

$$y = \frac{x}{1 + |x|}$$

Montrer que cette fonction est définie et continue $\forall\, x$ et qu'elle admet une dérivée pour $x = 0$.

Puisque $|x| \geqslant 0,\ 1 + |x| > 0$: $\dfrac{x}{1 + |x|}$ est toujours définie. La fonction $y = |x|$ est continue sur $]0, \infty[$ et $]-\infty, 0[$ puisqu'elle équivaut respectivement à $y_1 = x$ et $y_2 = -x$ qui sont des fonctions continues sur les intervalles $]0, \infty[$ et $]-\infty, 0[$.

Lorsque $x \to 0$, y_1 et $y_2 \to 0$, $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$. $|x|$ étant continue sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, il en est de même de $1 + |x|$ et de $\dfrac{x}{1 + |x|}$, quotient de 2 fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Puisque $y(0) = 0$, la dérivée pour $x = 0$ est donnée par :

$$\lim_{x\to 0} \frac{y}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + |x|} = 1$$

■ **7.** Variation et graphe de $y = \text{Arc tg}\,(\text{tg}\, x)$.

Rappelons que

$$z = \text{Arc tg}\, x \Leftrightarrow x = \text{tg}\, z \qquad \text{et} \qquad \frac{-\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}$$

Soit donc $y = \text{Arc tg}\,(\text{tg}\, x)$ d'où $\text{tg}\, y = \text{tg}\, x$ soit $y = x + K\pi$.

$$\text{et } \frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

La double inégalité précédente déterminera donc K, suivant l'intervalle de variation de x de façon que y reste compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $+\dfrac{\pi}{2}$.

Par exemple si $\dfrac{-\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ $\quad K = 0$ et $\quad y = x$

si $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$ $\quad K = -1$ et $\quad y = x - \pi$

si $\dfrac{3\pi}{2} < x < \dfrac{5\pi}{2}$ $\quad K = -2$ et $\quad y = x - 2\pi$

etc. on obtient le graphe suivant (Fig. 16) :

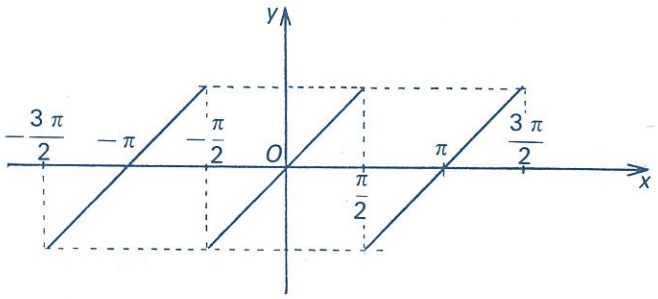


Figure 16.

On obtient comme on pouvait s'y attendre le graphe d'une fonction périodique, de période π.

On pourra, à titre d'exercice similaire, étudier la fonction

$$z = \operatorname{Arc\,tg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

■ **8.** Montrer que

$$2 \operatorname{Arc\,tg} (\sqrt{1 + x^2} - x) + \operatorname{Arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}$$

Posons $u = \sqrt{1 + x^2} - x$

$$2 \operatorname{Arc\,tg} u = \operatorname{Arc\,tg} \frac{2u}{1 - u^2} + n\pi$$

$$= \operatorname{Arc\,tg} \frac{2\sqrt{1 + x^2} - 2x}{1 - (1 + x^2 + x^2 - 2x\sqrt{1 + x^2})} + n\pi$$

$$= \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{x} + n\pi$$

Si $x > 0$ $\quad n = 0.$
Si $x < 0$ $\quad n = 1.$

Or $\quad \operatorname{Arc\,tg} x + \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{x} = \varepsilon \frac{\pi}{2} \begin{cases} \varepsilon = +1 \text{ si } x > 0 \\ \varepsilon = -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

On vérifie dans les deux cas que

$$2 \operatorname{Arc\,tg} (\sqrt{1 + x^2} - x) + \operatorname{Arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}$$

Remarque.

Une autre méthode consiste à dériver la quantité

$$y = 2 \operatorname{Arc\,tg} (\sqrt{1 + x^2} - x) + \operatorname{Arc\,tg} x$$

dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. On déterminera alors la valeur constante de y en faisant $x = 0$.

CHAPITRE 2

DÉRIVÉE ET DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE

1. DÉFINITION DE LA DÉRIVÉE

Soit $y = f(x)$ une fonction de x. Supposons qu'à partir d'une valeur x_0, pour laquelle $y = f(x_0)$ est définie, on donne à x un accroissement Δx, y subira un accroissement $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Si le rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers une limite finie lorsque Δx tend vers 0, cette limite s'appelle la dérivée de y pour $x = x_0$, et on note :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_{x_0} = f'(x_0)$$

D'une manière générale $f'(x)$ définit une nouvelle fonction de x qu'on appelle fonction dérivée de $y = f(x)$.

2. SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE DE LA DÉRIVÉE

Soit (C) la courbe représentative des variations de $y = f(x)$, A et B les points d'abscisses x_0, et $x_0 + \Delta x$ sur (C) (repère orthonormé).

La sécante AB a pour pente, le rapport de la différence des ordonnées de B et A à la différence de leurs abscisses; si α est l'angle (Ox, AB) on aura :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

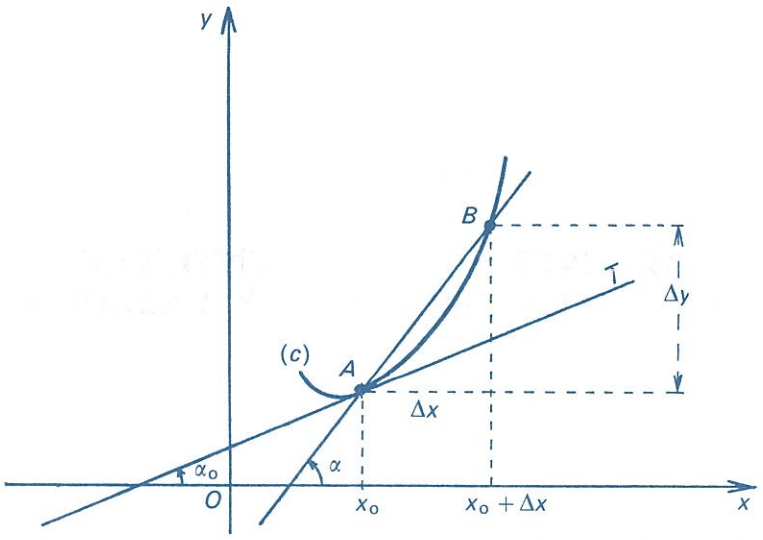


Figure 1.

Faisons tendre Δx vers 0; le point B se rapprochera du point A en décrivant (C). A la limite, si $y = f(x)$ admet une dérivée au point x_0 la droite AB pivotera autour de A, et tendra vers une position limite AT, qui par définition est la tangente en A à (C). *Cette tangente AT a donc pour pente $f'(x_0)$.*

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Remarques.

a) **Si $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers l'infini lorsque $\Delta x \to 0$, on dit que la dérivée est infinie pour x_0.** D'après l'interprétation géométrique de la dérivée, la tangente au point d'abscisse x_0 à (C) fera un angle de $\dfrac{\pi}{2}$ avec l'axe Ox.

b) **Il se peut que la limite de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ diffère suivant que Δx tend vers zéro par valeurs positives ou négatives.** On dit alors qu'il existe une dérivée à droite et une dérivée à gauche, qu'on note $f'(x_{0+})$ et $f'(x_{0-})$.

Au point M d'abscisse x_0, (C) admettra deux tangentes de pentes différentes : M est un point anguleux (cf. Fig. 2).

c) **Si une fonction est dérivable au point d'abscisse $x = x_0$, elle est également continue en x_0,** c'est-à-dire que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

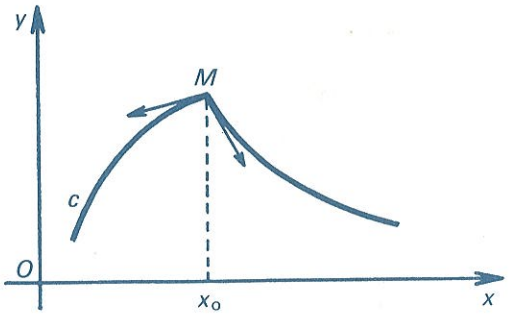


Figure 2.

En effet, soit $h(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, relation qui s'écrit encore

$$h(x) \,.\, (x - x_0) = f(x) - f(x_0)$$

Lorsque $x \to x_0$, $h(x) \to f'(x_0)$ quantité finie et $x - x_0 \to 0$, le produit $h(x) \,.\, (x - x_0)$ tend donc vers 0 et $f(x)$ tend vers $f(x_0)$.

3. EXEMPLES DE CALCUL DE DÉRIVÉES

D'après la définition, le procédé général de calcul des dérivées est le suivant :

– On donne à x un accroissement Δx et on calcule la quantité

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

– On forme le quotient de Δy par Δx et on le simplifie.

– On fait tendre Δx vers 0 et on cherche la limite de $\Delta y / \Delta x$ dans ces conditions.

■ **Exemple 1.** Dérivée d'une constante.

Si y = constante $\qquad \Delta y = 0 \qquad y' = 0$

■ **Exemple 2.**

$$y = x$$
$$y + \Delta y = y + \Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \qquad y' = 1$$

■ **Exemple 3.**

$$y = x^2 - 3x - 1$$
$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - 1 - (x^2 - 3x - 1)$$
$$\Delta y = x^2 + 2x \,.\, \Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x - 1 - x^2 + 3x + 1$$
$$= 2x \,.\, \Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - 3 + \Delta x$$

Lorsque $\Delta x \to 0$, le second membre tend vers $2x - 3$. Donc

$$y' = 2x - 3$$

■ **Exemple 4.**

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

Lorsque $\Delta x \to 0$ le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$ tend vers $-\frac{1}{x^2}$:

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

■ **Exemple 5.** Dérivée de $y = \sqrt{x}$, $x > 0$

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

en multipliant le numérateur et le dénominateur du second membre par

$$\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$$

nous obtenons :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\,(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

Lorsque $\Delta x \to 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$, si $x > 0$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Pour $x = 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to +\infty$, la dérivée est infinie.

■ **Exemple 6.**

$$y = \frac{2 - x}{2 + x}$$

$$y + \Delta y = \frac{2 - (x + \Delta x)}{2 + (x + \Delta x)}$$

$$\Delta y = \frac{2 - x - \Delta x}{2 + x + \Delta x} - \frac{2 - x}{2 + x}$$

$$= \frac{(2 - x - \Delta x)(2 + x) - (2 - x)(2 + x + \Delta x)}{(2 + x + \Delta x)(2 + x)}$$

$$= \frac{-4\,\Delta x}{(2 + x + \Delta x)(2 + x)}$$

Lorsque $\Delta x \to 0$, le rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{4}{(2 + x + \Delta x)(2 + x)}$ tend vers

$$y' = -\frac{4}{(2 + x)^2}$$

■ **Exemple 7.**

$$y = \sin x$$

$$y + \Delta y = \sin (x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin (x + \Delta x) - \sin x$$

Utilisons la formule de transformation d'une différence de sinus :

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p - q}{2} \cos \frac{p + q}{2}$$

Posons $p = x + \Delta x$, $q = x$; on en tire :

$$\frac{p - q}{2} = \frac{\Delta x}{2} \quad \text{et} \quad \frac{p + q}{2} = \frac{\Delta x}{2} + x$$

d'où :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \dfrac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \dfrac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x}$$

et en divisant haut et bas par 2, on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

Nous démontrerons dans un chapitre ultérieur que $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$. En utilisant ce résultat ainsi que la propriété de continuité de la fonction cosinus, nous voyons que lorsque $\Delta x \to 0$, $\Delta y / \Delta x \to \cos x$. Donc la dérivée de $y = \sin x$ est

$$y' = \cos x$$

■ **Exemple 8.**

$$y = \cos x$$

$$y + \Delta y = \cos (x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$
$$= -2 \sin \frac{\Delta x}{2} . \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x/2} . \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Lorsque $\Delta x \to 0$, le premier rapport du second membre tend vers 1, $\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ tend vers $\sin x$, la fonction sinus étant continue. Donc la dérivée de $y = \cos x$ est

$$y' = -\sin x$$

4. DÉRIVÉE DE LA SOMME, DU QUOTIENT OU DU PRODUIT DE DEUX FONCTIONS

Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions admettant des dérivées et

$$y = u(x) + v(x)$$

Soit Δx un accroissement de x, Δy, Δu et Δv les accroissements correspondants de y, u et v.

$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$
$$= \Delta u + \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Lorsque $\Delta x \to 0$, Δu et Δv tendent également vers 0 puisque $u(x)$ et $v(x)$ supposées dérivables, sont des fonctions continues; les rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tendent respectivement vers u' et v'. D'où :

$$\boxed{y'_x = u'_x + v'_x} \qquad (1)$$

Le même procédé de calcul s'applique au cas où

$$y = u(x) . v(x)$$

A un accroissement Δx de x correspond l'accroissement Δy de y :

$$\Delta y = (u + \Delta u) . (v + \Delta v) - u . v$$
$$= v . \Delta u + u . \Delta v + \Delta u . \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v . \frac{\Delta u}{\Delta x} + u . \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u . \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Lorsque $\Delta x \to 0$, $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ et $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ tendent respectivement vers u' et v' et :

$$\boxed{y' = vu' + uv'} \tag{2}$$

Enfin si

$$y = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v(u + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)}$$

$$= \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\,\Delta u/\Delta x - u\,\Delta v/\Delta x}{v(v + \Delta v)}$$

Lorsque $\Delta x \to 0$ le numérateur tend vers $vu' - uv'$, le dénominateur vers v^2, d'où :

$$\boxed{y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}} \tag{3}$$

Applications

Dérivée de x^m pour m entier positif.

Nous allons montrer que, d'une manière générale, la dérivée de x^m est mx^{m-1}.

Nous avons vu que la dérivée de $y = x$ est 1. La dérivée de $y = x^2 = x \,.\, x$ s'obtient en posant $u(x) = v(x) = x$; alors $u' = v' = 1$. En appliquant le résultat (2) nous obtenons $y' = 2x$.

Supposons que la dérivée de $y = x^{m-1}$ soit $(m - 1)\,x^{m-2}$. La dérivée de $y = x^m$ s'obtient en posant $x^{m-1} = u$ et $x = v$ alors

$$y' = vu' + uv' = x \,.\, (m - 1)\,x^{m-2} + x^{m-1} \,.\, 1$$
$$= mx^{m-1}.$$

Ce résultat vrai pour $m = 2$, est ainsi généralisé par récurrence.

Dérivée de $y = \operatorname{tg} x$.

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Si on pose $\sin x = u$, $\cos x = v$, $u' = \cos x$, et $v' = -\sin x$

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

Dérivée de $y = \operatorname{cotg} x$.

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$u = \cos x \qquad u' = -\sin x$$

$$v = \sin x \qquad v' = \cos x$$

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Dérivée de

$$y = \frac{3 \cos x}{1 + \sin x}$$

Posons $3 \cos x = u$ d'où $u' = -3 \sin x$

$1 + \sin x = v$ d'où $v' = \cos x$

$$y' = \frac{(1 + \sin x)(-3 \sin x) - 3 \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-3 \sin x - 3(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-3 \sin x - 3}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-3}{1 + \sin x}$$

5. DÉRIVÉE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Une fonction composée est de la forme :

$$y = f(u)$$

où u est une fonction de x

$$u = \varphi(x)$$

x est la variable et u une fonction intermédiaire.

Nous allons démontrer le théorème suivant : **si u admet une dérivée u'_x, et y une dérivée par rapport à u y'_u, la dérivée de y par rapport à x sera :**

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x}$$

Supposons $\Delta u \neq 0$ pour Δx tendant vers 0 mais non nul.

Le rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ peut s'écrire $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$. Lorsque $\Delta x \to 0$, Δu tend également vers 0, puisque $u(x)$ étant dérivable par rapport à x est une fonction continue. $\Delta y/\Delta u$ tend vers y'_u et $\Delta u/\Delta x$ tend vers u'_x.

Remarque.

Une démonstration plus générale tiendrait compte du cas particulier où $\Delta u = 0$ lorsque Δx tend vers 0 sans être nul.

Dans ce cas il suffit de poser :

$$\varepsilon = \frac{\Delta f}{\Delta u} - f'(u) \qquad \text{si} \qquad \Delta u \neq 0$$

$$\varepsilon = 0 \qquad \text{si} \qquad \Delta u = 0$$

Δf s'écrit alors :

$$\Delta f = [\varepsilon + f'(u)]\, \Delta u$$

et

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = [\varepsilon + f'(u)] \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

lorsque $\Delta x \to 0$, $\Delta u \to 0$, $\varepsilon \to 0$ et

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'_x = f'_u \cdot u'_x.$$

Applications.

Dérivée de $y = [u(x)]^m$ pour m entier positif.

En appliquant le résultat précédent $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ nous obtenons :

$$\boxed{y' = m u^{m-1} u'_x}$$

Dérivée de $y = \dfrac{1}{u(x)}$.

En remplaçant m par -1 dans le résultat précédent on démontre également :

$$\boxed{y' = -\frac{u'_x}{u^2}}$$

■ **Exemple 1.**

Dérivée de $\operatorname{tg}^3 \dfrac{2x}{3}$.

Posons $\frac{2x}{3} = u$; $u'_x = \frac{2}{3}$. La dérivée de $\operatorname{tg}^3 \frac{2x}{3}$ est donc :

$$3 \cdot \frac{2}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{2x}{3} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{2x}{3}\right) = 2 \operatorname{tg}^2 \frac{2x}{3} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{2x}{3}\right)$$

■ **Exemple 2.**

Dérivée de $y = \sin(x^2 + 1)$.

Posons $x^2 + 1 = u$; $u' = 2x$ d'où :

$$y' = 2x \cdot \cos(x^2 + 1)$$

■ **Exemple 3.**

Dérivée de $y = (1 - x^4)^5$.

Posons $u = 1 - x^4$; $u' = -4x^3$ d'où :

$$y' = -20x^3 (1 - x^4)^4$$

6. RELATION LIANT LES DÉRIVÉES DE DEUX FONCTIONS RÉCIPROQUES

Soit $y = f(x)$ une fonction continue et strictement monotone, et $x = g(y)$ sa fonction réciproque.

Si $y = f(x)$ admet une dérivée f'_x, la dérivée de $g(y)$ sera :

$$x'_y = g'(y) = \frac{1}{f'_x}.$$

En effet, donnons à x un accroissement Δx, et soit Δy l'accroissement correspondant de y. Puisqu'on suppose y strictement monotone, pour $\Delta x \neq 0$, Δy sera différent de 0, d'où

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

lorsque $\Delta x \to 0$, Δy tendra également vers 0 puisque y est continue, et

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{y'_x}.$$

Remarque.

Nous avons vu que les graphes représentant $f(x)$ et $g(x)$ rapportées à un même système d'axes rectangulaires sont symétriques par rapport à la bissectrice $y = x$ de l'angle xOy. En deux points correspondants M et M', les tangentes à ces courbes seront symétriques par rapport à la droite $y = x$.

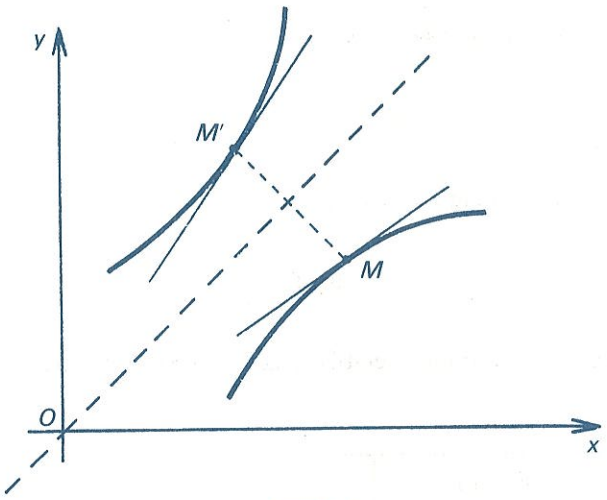


Figure 3.

Applications.

Dérivée de $y = x^{1/n}$ *pour n entier.*

La fonction réciproque de y est $x = y^n$

$$x'_y = ny^{n-1} = n(x^{1/n})^{n-1} = nx^{\frac{n-1}{n}}$$

d'où

$$y'_x = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{1/n-1}$$

Dérivée de $y = x^p$ *pour p rationnel.*

Soit $p = \frac{m}{n}$, m et n étant entiers. Posons $x^{1/n} = u$, alors $y = u^m$ d'où

$$y'_x = mu^{m-1}u'_x$$

$$= mx^{\frac{m-1}{n}} \cdot \frac{1}{n} x^{1/n-1}$$

$$= \frac{m}{n} x^{m/n-1/n} \cdot x^{1/n-1}$$

$$= \frac{m}{n} x^{m/n-1} = px^{p-1}.$$

Dérivées des fonctions trigonométriques inverses

$$y = \text{Arc sin } x \Leftrightarrow x = \sin y; \quad \frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$(\text{Arc sin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \text{Arc cos } x \Leftrightarrow x = \cos y; \quad \frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1 - x^2}$$

$$(\text{Arc cos } x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \text{Arc tg } x \Leftrightarrow x = \text{tg } y; \quad \frac{dx}{dy} = 1 + \text{tg}^2 y = 1 + x^2$$

$$(\text{Arc tg } x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Les principaux résultats relatifs aux dérivées sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Fonction	Dérivée
$y =$ constante	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^2$	$y' = 2x$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \text{tg } x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x$
$y = \text{cotg } x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y = u(x) + v(x)$	$y' = u' + v'$
$y = u \cdot v$	$y' = vu' + uv'$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$
$y = f[u(x)]$	$y' = f'_u \cdot u'_x$
$y = [u(x)]^n$	$y' = nu^{n-1} \cdot u'_x$

7. FONCTIONS DÉRIVÉES SUCCESSIVES. FORMULE DE LEIBNIZ

La fonction $f'(x)$ dérivée de $f(x)$ peut elle-même être dérivable, sa dérivée notée $f''(x)$ est la dérivée d'ordre 2 de $f(x)$ ou dérivée seconde de $f(x)$.

On définit ainsi de proche en proche la dérivée $n^{\text{ième}}$ ou d'ordre n de $f(x)$ qu'on note $f^{(n)}(x)$, comme étant la dérivée de $f^{(n-1)}(x)$.

Formule de Leibniz

Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables, la règle de dérivations successives du produit conduit à

$$[f \cdot g]' = f'g + g'f$$
$$[fg]'' = f''g + 2f'g' + g''f$$
$$[fg]''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

La loi de formation des coefficients rappelle la formule du binôme : vérifions cette propriété par récurrence.

Supposons que

$$[fg]^{(n-1)} = f^{(n-1)}g + C^{1}_{n-1} f^{(n-2)}g' + \ldots + C^{p-1}_{n-1} f^{(n-p)}g^{(p-1)} + C^{p}_{n-1} f^{(n-p-1)}g^{(p)} + \ldots + fg^{(n-1)}$$

Nous obtenons par dérivation

$$\begin{aligned}[f \cdot g]^{(n)} &= [f^{(n)}g + f^{(n-1)}g'] + C^{1}_{n-1}[f^{(n-1)}g' + f^{(n-2)}g''] + \ldots + \\ &\quad C^{p-1}_{n-1}[f^{(n-p+1)}g^{(p-1)} + f^{(n-p)}g^{(p)}] + \ldots + [f'g^{(n-1)} + fg^{(n)}] \\ &= f^{(n)}g + (1 + C^{1}_{n-1}) f^{(n-1)}g' + \ldots + \\ &\quad (C^{p-1}_{n-1} + C^{p}_{n-1}) f^{(n-p)}g^{(p)} + \ldots + fg^{(n)} \\ &= f^{(n)}g + C^{1}_{n} f^{(n-1)}g' + \ldots + C^{p}_{n} f^{(n-p)}g^{(p)} + \ldots + fg^{(n)}\end{aligned}$$

Cette égalité, appelée formule de Leibniz, est valable pour tout entier $n \leqslant N$.

8. DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE

Définition

Soit une fonction $x \to f(x) = y$ définie sur $[a, b]$ et dérivable au point $x_0 \in [a, b]$, et Δx un accroissement de x à partir de x_0. On appelle différentielle de $f(x)$ au point x_0, l'application qui à Δx fait correspondre le nombre $f'(x_0) \cdot \Delta x$ et on note $\mathrm{d}y = f'(x_0) \cdot \Delta x$. (1)

Dans le cas où $y = f(x) = x$, $f'(x) = 1$ alors $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x = \Delta x$. Pour la variable indépendante x, il y a identité entre un accroissement arbitraire Δx de x, et la différentielle $\mathrm{d}x$ de x : $\mathrm{d}x = \Delta x$.

Cette remarque permet de mettre (1) sous la forme :

$$\boxed{\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x}$$

et pour désigner la dérivée $y' = f'(x)$ *on écrira* $f'(x) = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, *rapport des différentielles de* y *et de* x.

On peut donner une interprétation géométrique simple de la différentielle d'une fonction.

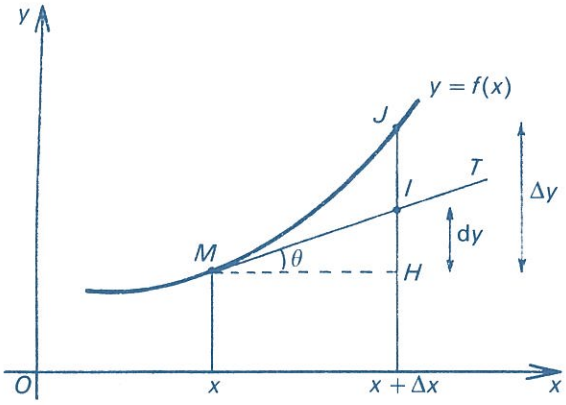


Figure 4.

La droite d'abscisse $x + \Delta x$ est coupée en I par la tangente en M à la courbe $y = f(x)$.

Dans le triangle IMH

$$IH = HM \operatorname{tg} \theta$$
$$= y' \cdot \Delta x$$
$$= \mathrm{d}y$$

alors que $JH = \Delta y$

Il est intuitif que $JI = \Delta y - \mathrm{d}y$ est un infiniment petit avec Δx. Dans tout autre cas de figure $f(x)$ décroissante par exemple, ces résultats seraient vrais au signe près et le raisonnement identique.)

Effet d'un changement de variable

Supposons que x soit fonction d'une nouvelle variable indépendante t :

$$x = \varphi(t)$$

$y = f(x) = f[\varphi(t)] = g(t)$ est une fonction de t dont la dérivée, si $\varphi(t)$ est une fonction dérivable, sera $y' = g'(t) = f'(x)\,\varphi'(t)$.

Sa différentielle sera $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}t = f'(x)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. Or $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ n'est autre que la différentielle de $x = \varphi(t)$, c'est-à-dire $\mathrm{d}x$, d'où :

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

On en déduit que la différentielle est invariante par le changement de variable $x = \varphi(t)$ et que x soit ou non la variable indépendante

$$\boxed{\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Différentielle de la somme, du produit et du quotient de deux fonctions

Différentielle de la somme de 2 fonctions

si

$$y = u(x) + v(x)$$
$$y' = u' + v'$$
$$dy = y'\,dx = (u' + v')\,dx$$

$$\boxed{dy = du + dv}$$

Différentielle du produit de 2 fonctions

si

$$y = u(x) \cdot v(x)$$
$$y' = uv' + vu'$$
$$dy = y'\,dx = uv'\,dx + vu'\,dx$$

$$\boxed{dy = u\,dv + v\,du}$$

Différentielle du quotient de 2 fonctions.

si

$$y = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$
$$dy = y'\,dx = \frac{vu'\,dx - uv'\,dx}{v^2}$$

$$\boxed{dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}}$$

Exemples.

La différentielle de $y = \frac{1}{x}$ est $-\frac{dx}{x^2}$, celle de $\cos^2 x$ est

$-2 \sin x \cos x\,dx$,

celle de $\operatorname{tg} x$ est $(1 + \operatorname{tg}^2 x).dx$.

Résumé du chapitre 2

DÉRIVÉE ET DIFFÉRENTIELLE

Dérivée

- *Définition*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- *Signification géométrique*

$f'(x_0)$ mesure la pente de la tangente au point d'abscisse x_0 du graphe représentant $f(x)$.

- *Dérivée de la somme, du quotient et du produit de 2 fonctions*

$$y(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow y'(x) = u'(x) + v'(x)$$

$$y(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow y'(x) = \frac{v(x)\,u'(x) - u(x)\,v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow y'(x) = v'(x)\,u(x) + u(x)\,v'(x)$$

- *Dérivée d'une fonction composée*

$$y = f(u) \quad \text{avec} \quad u = \varphi(x) \Rightarrow y'_x = f'_u \cdot u'_x$$

Différentielle.

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

- La différentielle est invariante par le changement de variable $x = \varphi(t)$.
- Différentielle de la somme, du produit, du quotient de 2 fonctions :

$$y = u(x) + v(x) \Rightarrow \mathrm{d}y = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$$

$$y = u(x) \times v(x) \Rightarrow \mathrm{d}y = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v$$

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \mathrm{d}y = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}$$

- **Dérivées des fonctions usuelles**

$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{Arc}\sin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$y = \text{Arc cos } x \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \text{Arc tg } x \qquad y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$y = u^n(x) \qquad y' = nu^{n-1}u'_x$$

- **Formule de Leibniz**

$$[f \cdot g]^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g' + C_n^2 f^{(n-2)}g'' + \ldots + C_n^p f^{(n-p)}g^{(p)} + \ldots + fg^{(n)}$$

EXERCICES

■ **1.** Calculer la dérivée de $y = \sin^n x \cdot \cos^p x$.

Posons $u = \sin^n x \quad v = \cos^p x$

$$y = u(x) \cdot v(x) \quad y' = vu' + uv'$$

$$u' = n \sin^{n-1} x \cdot \cos x \quad v' = -p \cos^{p-1} x \sin x$$

$$y' = n \sin^{n-1} x \cos^{p+1} x - p \cos^{p-1} x \cdot \sin^{n+1} x$$

$$= \sin^{n-1} x \cos^{p-1} x (n \cos^2 x - p \sin^2 x)$$

■ **2.** Calculer la dérivée de

$$y = \sqrt{\frac{1 + \sin \sqrt{x}}{1 - \sin \sqrt{x}}}$$

---

y est de la forme $\sqrt{u}$:

$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$u' = \frac{\dfrac{(1 - \sin \sqrt{x}) \cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{(1 + \sin \sqrt{x}) \cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(1 - \sin \sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1 - \sin \sqrt{x})^2}$$

$$y' = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1 - \sin \sqrt{x})\sqrt{\cos^2 \sqrt{x}}}$$

La valeur de y' dépend du signe de $\cos \sqrt{x}$, si

$$0 \leqslant \sqrt{x} < \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{3\pi}{2} < \sqrt{x} \leqslant 2\pi \pmod{2\pi}$$

$$y' = \frac{1}{2(1 - \sin \sqrt{x})\sqrt{x}}$$

si

$$\frac{\pi}{2} < \sqrt{x} \leqslant \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

$$y' = \frac{-1}{2(1 - \sin \sqrt{x})\sqrt{x}}$$

■ **3.** Calculer la dérivée de

$$y = \operatorname{Arc\,tg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

Posons $$u = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2u} \cdot \frac{(1 + \cos x)\sin x - (1 - \cos x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x}{2\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \cdot (1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{2\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \pm \frac{1}{2}$$

le signe $+$ étant à retenir pour $x \in [0, \pi]$ $(2K\pi)$

le signe $-$ étant à retenir pour $x \in [\pi, 2\pi]$ $(2K\pi)$.

Remarque.

En exprimant $\cos x$ en fonction de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, y se ramène à :

$$\operatorname{Arc\,tg} \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \frac{x}{2} \qquad \text{pour } 0 < x < \pi$$

$$\operatorname{Arc\,tg} \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = -\frac{x}{2} \qquad \text{pour } -\pi < x < 0$$

$$\operatorname{Arc\,tg} \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \pi - \frac{x}{2} \qquad \text{pour } \pi < x < 2\pi \text{ etc.}$$

et la valeur de la dérivée est alors immédiate.

4. Étudier la fonction $y = \text{Arc tg}\,(x + \sqrt{x^2 - 1})$ et définir sa fonction réciproque.

Arc tg x étant définie $\forall\, x \in \mathbb{R}$, y est défini pour $x^2 - 1 \geqslant 0$ soit pour $x \notin]-1, +1[$.

La dérivée de y est

$$y' = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} \times \frac{1}{2x\,(x + \sqrt{x^2 - 1})}$$

$x + \sqrt{x^2 - 1}$ n'étant jamais nul, ce résultat se réduit à

$$y' = \frac{1}{2x\sqrt{x^2 - 1}} \begin{cases} y' > 0 & \text{pour} \quad x > 1, \\ y' < 0 & \text{pour} \quad x < -1. \end{cases}$$

Lorsque $x \to +\infty$, $x + \sqrt{x^2 - 1} \to +\infty$ et $y \to \dfrac{\pi}{2}$ et la droite $y = \dfrac{\pi}{2}$ est asymptote au graphe, lorsque $x \to +\infty$. Lorsque $x \to -\infty$, y est indéterminé de la forme $\infty - \infty$ mais

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

quantité qui tend vers 0 lorsque $x \to -\infty$ et l'axe ox est asymptote au graphe.

Lorsque $x \to +1_+$, $y' \to +\infty$, et pour $x \to -1_-$, $y' \to -\infty$: pour ces valeurs, les tangentes sont parallèles à l'axe Oy.

Tableau de variation.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$\|\|$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}$

Graphe.

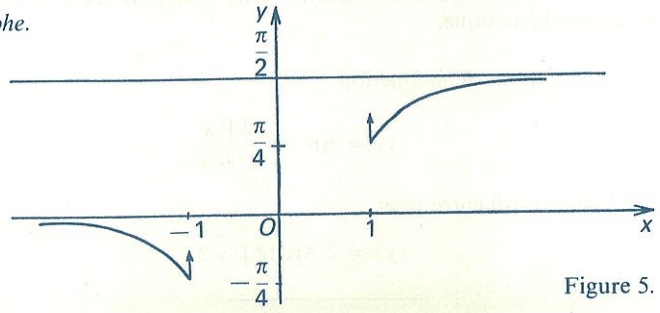


Figure 5.

Déterminer la fonction réciproque revient à chercher d'une part pour quelles valeurs de y, x est défini et d'autre part l'expression de x en fonction de y. Le graphe précédent montre que :

pour $y < -\frac{\pi}{4}$ x n'est pas défini

pour $\frac{-\pi}{4} \leqslant y < 0$ $x \leqslant -1$

pour $0 < y < \frac{\pi}{4}$ x n'est pas défini

pour $\frac{\pi}{4} \leqslant y < \frac{\pi}{2}$ $x \geqslant +1$

D'autre part

$$y = \text{Arc tg}\,(x + \sqrt{x^2 - 1}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} = \text{tg}\, y, \\ \text{avec } \frac{-\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Dans les mêmes conditions nous avons

$$\sqrt{x^2 - 1} = \text{tg}\, y - x$$

soit en élevant au carré, à condition que $\text{tg}\, y - x \geqslant 0$

$$x^2 - 1 = \text{tg}^2 y - 2x\,\text{tg}\, y + x^2 \quad \text{et puisque} \quad \text{tg}\, y \neq 0$$

$$x = \frac{\text{tg}^2 y + 1}{2\,\text{tg}\, y} = \frac{1}{\sin 2y}$$

Remarquons d'une part que

$$\text{tg}\, y - x = \text{tg}\, y - \frac{1}{\sin 2y} = \frac{2\sin^2 y - 1}{\sin 2y} \text{ est bien positif}$$

pour

$$\frac{-\pi}{4} \leqslant y < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4} \leqslant y < \frac{\pi}{2}$$

et que d'autre par la fonction $\text{Arc tg}\,(x + \sqrt{x^2 - 1})$ admet dans les deux intervalles où elle est monotone et continue deux fonctions réciproques de même expression mathématique.

■ **5.** Étudier les variations de la fonction

$$y_1 = \text{Arc sin}\,\frac{2\sqrt{x}}{1 + x}$$

Quel lien y a-t-il entre y_1 et

$$y_2 = 2\,\text{Arc tg}\,\sqrt{x}\,?$$

y_1 est définie pour $x > 0$.

y'_1 se calcule en posant $u = \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$

$$y'_1 = \frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{(1+x)\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{4x}{(1+x)^2}}}$$

$$= \frac{1-x}{\sqrt{x}\,(1+x)\,|1-x|} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x}\,(1+x)}$$

avec $\varepsilon = +1$ si $1 - x > 0$ soit $x < 1$

$\varepsilon = -1$ si $1 - x < 0$ soit $x > 1$

Il y a pour $x = 1$ une discontinuité pour la dérivée y'_1, mais non pour $y_1(x)$: en $x = 1$ nous aurons donc un point anguleux.

Le tableau de variation est donc :

x	0		1		$+\infty$
y'	∞	$+$	$+\frac{1}{2}$ ‖	$-\frac{1}{2}$	$-$
y	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	0

et le graphe correspondant

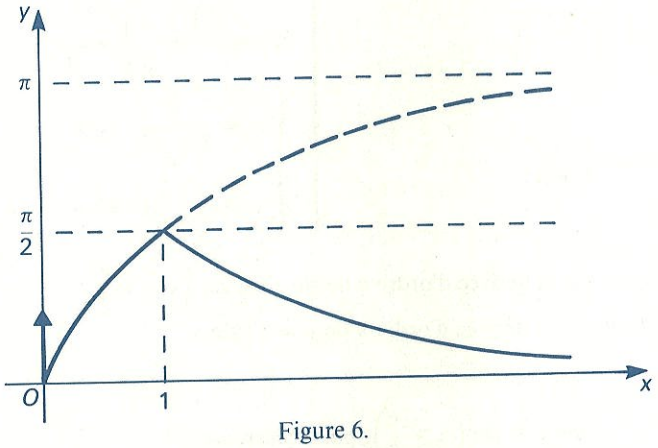


Figure 6.

$$y'_2 = \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \varepsilon y'_1$$

On en déduit $y_1 = y_2$ pour $x < 1$ et

$y_1 = \pi - y_2$ pour $x > 1$

On pouvait d'ailleurs retrouver directement ces résultats en remarquant que

$$\sin y_1 = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$$

et

$$\operatorname{tg}\frac{y_2}{2} = \sqrt{x}$$

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

■ **6.** ***Calculer les dérivées des fonctions suivantes***

$$y = \frac{x^n}{(1+x)^n}$$

$$y = \frac{x\sqrt{x-1}}{(x-2)^3}$$

$$y = \operatorname{Arc}\sin\frac{2x}{1+x^2}$$

$$y = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{2x}{1-x^2}$$

$$y = \sqrt{x - \sqrt{x^2-1}}$$

$$y = \operatorname{Arc}\cos\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Réponses

$$y' = \frac{nx^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}$$

$$y' = \frac{-3x^2 - 2x + 4}{2\sqrt{x-1}\,(x-2)^4}$$

$$y' = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} \text{ pour } -1 < x < 1 \\ \dfrac{-2}{1+x^2} \text{ pour } x < -1 \text{ et } x > 1 \end{cases}$$

$$y' = \frac{2}{1+x^2}$$

$$y' = -\frac{\sqrt{x - \sqrt{x^2-1}}}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2}{1+x^2} & \text{pour} \quad x < 0 \\ y' = \dfrac{-2}{1+x^2} & \text{pour} \quad x > 0. \end{cases}$$

■ **7.** Montrer que la dérivée d'ordre n de $\sin x$ est $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Calculer la dérivée d'ordre n de $y = x^3 \sin x$.

$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, puis récurrence.

La formule de Leibniz donne

$$y^{(n)} = x\,[x^2 - 3n(n-1)]\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) - n\,[3x^2 - (n-1)(n-2)]\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

CHAPITRE 3

PRIMITIVES

1. DÉFINITION

Soit $x \to f(x)$ une fonction définie sur $[a, b]$.

On dit que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, si $F(x)$ admet $f(x)$ pour dérivée :

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x).$$

Exemples :

sin x est une primitive de cos x puisque $\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$. De même $\frac{x^2}{2}$ est une primitive de x, puisque $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) = x$.

D'une manière générale, une primitive de x^n, pour n différent de -1 est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Si on connaît une primitive $F(x)$ de $f(x)$, on en connaît une infinité. En effet si $G(x) = F(x) + C$, où C est une constante arbitraire, la dérivée de $G(x)$ est la même que celle de $F(x)$: $G(x)$ et $F(x)$ sont donc deux primitives d'une même fonction .

Les primitives d'une fonction ne diffèrent que d'une constante. (Cf. p. 107.)

2. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

Soit (C) la courbe représentative de $y = f(x)$ supposée continue, $A'A$ et $M'M$ les ordonnées correspondant aux valeurs a et x de l'abscisse, a étant constant.

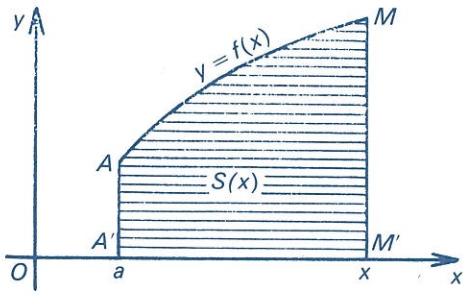


Figure 1.

Supposons que $f(x)$ ne change pas de signe entre a et x. L'aire comprise entre l'arc $\overset{\frown}{AM}$ et les droites AA' et MM' sera une fonction de x, soit $S(x)$.

Adoptons la convention de signe suivante :

– Si entre a et x, $f(x)$ est positive, $S(x)$ sera comptée positivement si $a < x$ et négativement si $a > x$.

– Si $f(x)$ est négative entre a et x, $S(x)$ sera comptée négativement si $a < x$ et positivement si $a > x$.

Si $f(x)$ change de signe entre a et x, l'aire totale comprise entre la courbe (C), l'axe des x et les droites d'abscisse a et x, sera la somme algébrique des aires qui se trouvent de part et d'autre de l'axe des x, chacune d'elles affectée du signe qui lui convient.

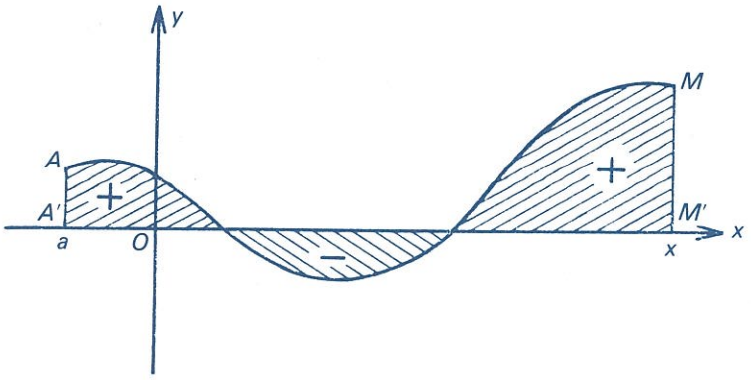


Figure 2.

Théorème

La fonction $S(x)$ est la primitive de $f(x)$ qui s'annule pour $x = a$.

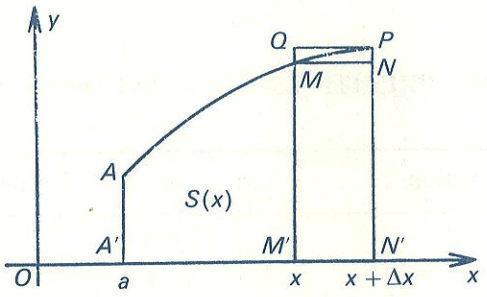


Figure 3.

En effet : donnons à x un accroissement Δx et supposons que $f(x)$ reste monotone dans l'intervalle $[x, x + \Delta x]$. $S(x)$ va s'accroître d'une aire ΔS comprise entre les aires des rectangles $MNN'M'$ et $QPN'M'$.

Soit :

$$y\,\Delta x < \Delta S < (y + \Delta y)\,\Delta x$$

$\dfrac{\Delta S}{\Delta x}$ est donc compris entre y et $y + \Delta y$. $y(x)$ étant supposée continue, lorsque

$$\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta S/\Delta x = S'(x) = y.$$

Toute fonction continue y, admet une primitive $S(x)$, qui est l'aire comprise entre la courbe représentative de y et les droites d'abscisses a et x.

Si $F(x)$ est une primitive quelconque de $f(x)$ nous aurons :

$$S(x) = F(x) + C$$

où C est une constante. Puisque $S(a) = 0$, $F(a) + C = 0$ et $C = -F(a)$ d'où

$$\boxed{S(x) = F(x) - F(a)}$$

et nous désignerons cette quantité par le symbole $[F(t)]_a^x$.

Une autre notation qui trouvera sa justification dans le chapitre 12 est :

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

qui se lit « somme de a à x de $f(t)\,\mathrm{d}t$ ».

L'aire comprise entre la courbe $y = f(x)$ et les deux droites d'abscisses a et b sera représentée par

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. TABLEAU DES PRIMITIVES DES FONCTIONS USUELLES

Fonction	Primitive
x^m	$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \forall\, m \neq -1, m \in R$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$1/\cos^2 x$	$\operatorname{tg} x + C$
$1/\sin^2 x$	$-\operatorname{cotg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arc}\sin x + C$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arc}\cos x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x + C$

Ce tableau sera complété ultérieurement après l'étude des fonctions exponentielles, logarithmiques et hyperboliques.

Résumé du chapitre 3

PRIMITIVES

- $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, fonction continue, si :

$$F'(x) = f(x).$$

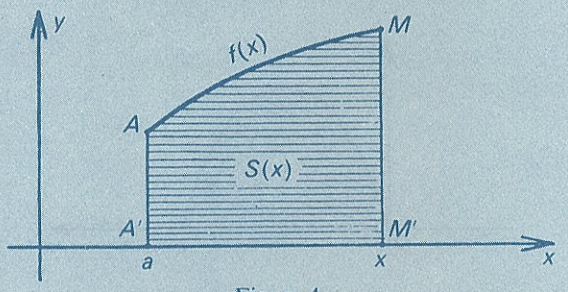


Figure 4.

- L'aire $S(x)$ limitée par le graphe de $y = f(x)$ et les droites d'abscisses a et x est la primitive de $f(x)$ qui s'annule pour $x = a$.
- Toute primitive $F(x)$ de $f(x)$ vérifie la relation :

$$S(x) = F(x) - F(a)$$
$$= [F(t)]_a^x$$

- Le tableau de la page précédente donnant les primitives les plus usuelles fait partie des résultats à mémoriser.

EXERCICES

1. Calcul de l'aire S comprise entre l'axe des x, la droite d'abscisse 2 et la courbe représentative de $y = ax^2$.

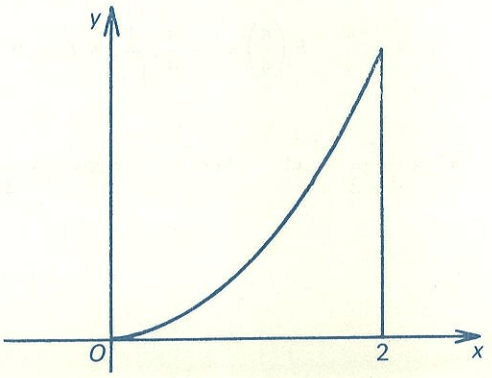


Figure 5.

Une primitive de ax^2 est $\frac{ax^3}{3}$. L'aire S est donc :

$$S = \left[\frac{ax^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8\,a}{3}$$

■ **2.** Calcul de l'aire S d'une arcade de la sinusoïde $y = \sin x$.

$-\cos x$ est une primitive de $\sin x$.

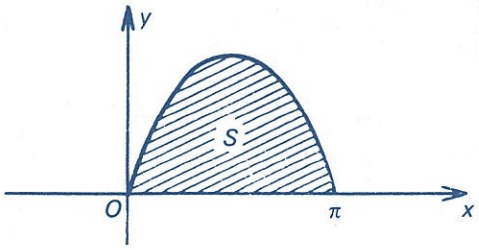


Figure 6.

d'où :

$$S = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$$

■ **3.** Calcul de l'aire S comprise entre la courbe représentative de $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ et les droites d'abscisses $x = 0$ et $x = \pi/4$.

Une primitive de $1/\cos^2 x$ est $\operatorname{tg} x$.

$$S = [\operatorname{tg} x]_0^{\pi/4} = 1$$

■ **4.** Quelle est la primitive de $y = x \sin x - \cos x$ qui s'annule pour $x = \pi/4$?

Une primitive de $x \sin x - \cos x$ est $-x \cos x$; ceci se vérifie aisément en posant $u = x$ et $v = -\cos x$ et en utilisant la relation $(uv)' = vu' + uv'$. La primitive cherchée peut donc s'écrire :

$$F(x) = -x \cos x + C$$

Pour

$$x = \frac{\pi}{4}, \quad F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + C = 0$$

donc :

$$C = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad F(x) = -x \cos x + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

CHAPITRE 4

FONCTION LOGARITHME

Dans le chapitre précédent nous avons vu que la primitive de $y = x^n$, pour n rationnel et différent de -1 est $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

Le cas $n = -1$ (qui correspond à $y = 1/x$) n'a pas encore été étudié.

1. DÉFINITION DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN DE x

Nous appellerons logarithme népérien d'un nombre positif x, et nous noterons Log x, la primitive de $1/x$ qui s'annule pour $x = 1$.

$$\text{Log } x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

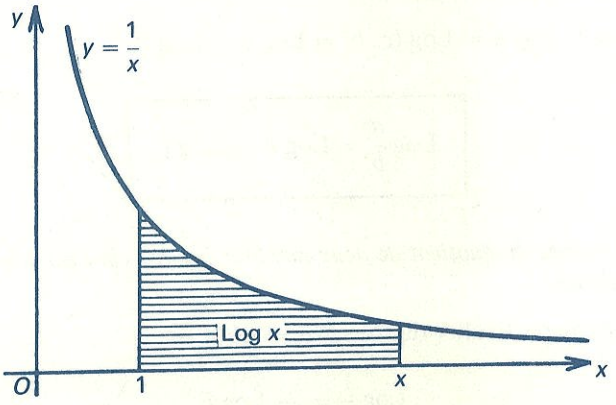


Figure 1.

En tenant compte des conventions de signe du chapitre précédent, l'aire comprise entre les droites d'abscisses 1 et X, et la courbe représentative de la fonction $y = \frac{1}{x}$ mesure le logarithme népérien de X.

De la définition précédente, nous déduisons que le logarithme d'un nombre supérieur à 1 est positif, le logarithme d'un nombre compris entre 0 et 1, la valeur 0 étant exclue, est négatif. Le logarithme de 1 est nul.

2. PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION LOGARITHME

1) *Logarithme d'un pròduit.*

Considérons la fonction $y = \text{Log } ax$, a étant une constante positive. Sa dérivée est $y' = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$; elle est égale à la dérivée de Log x.

Nous en concluons que Log ax = Log x + K, K étant une constante. Si nous faisons $x = 1$ dans la relation précédente, nous en déduisons

$$\text{Log } a = K$$

d'où

$$\boxed{\text{Log } ax = \text{Log } x + \text{Log } a}$$

Le logarithme du produit de deux nombres positifs est égal à la somme de leurs logarithmes.

2) *Logarithme d'un quotient.*

Si $c = a/b$, Log a = Log $(c \cdot b)$ = Log c + Log b,

ou

$$\boxed{\text{Log } \frac{a}{b} = \text{Log } a - \text{Log } b}$$

Le logarithme du quotient de deux nombres positifs est égal à la différence de leurs logarithmes.

Dans le cas particulier où $a = 1$, $c = 1/b$

$$\text{Log } \frac{1}{b} = - \text{Log } b.$$

3) *Logarithme d'une puissance.*

Nous nous proposons de calculer le logarithme de $y = x^m$, pour m entier ou rationnel.

a) m entier.

Pour $m = 2$ $\quad \text{Log } x^2 = \text{Log } (x \,.\, x) = 2 \text{ Log } x$

Pour $m = 3$ $\quad \text{Log } x^3 = \text{Log } (x^2 \,.\, x) = \text{Log } x^2 + \text{Log } x = 3 \text{ Log } x.$

On peut montrer grâce à un raisonnement par récurrence que pour tout nombre entier $m \geqslant 0$:

$$\text{Log } x^m = m \text{ Log } x.$$

Nous venons de voir que cette propriété est vraie pour $m = 2$ et $m = 3$; supposons qu'elle est vraie à l'ordre $m - 1$, c'est-à-dire supposons que $\text{Log } x^{m-1} = (m - 1) \text{ Log } x$;

$$\text{Log } x^m = \text{Log } (x \,.\, x^{m-1}) = \text{Log } x + (m - 1) \text{ Log } x = m \text{ Log } x.$$

Pour m entier, mais négatif, il suffit de partir de :

$$\text{Log } \frac{1}{x} = - \text{ Log } x \qquad (m = -1)$$

et

$$\text{Log } \frac{1}{x^2} = \text{Log } \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = - 2 \text{ Log } x \qquad (m = -2)$$

et de généraliser par récurrence.

b) m rationnel.

m est de la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont entiers. $y = x^m = x^{p/q}$ est équivalent à $y^q = x^p$ ou à $\text{Log } y^q = \text{Log } x^p$.

D'après (*a*) :

$$q \text{ Log } y = p \text{ Log } x$$

$$\text{Log } y = \frac{p}{q} \text{ Log } x = m \text{ Log } x.$$

Donc, pour *m* entier ou rationnel, positif ou négatif

$$\boxed{\text{Log } x^m = m \text{ Log } x}$$

3. ÉTUDE DE LA FONCTION $y = \text{Log } x$

$y = \text{Log } x$ est définie pour tout x strictement positif. Sa dérivée $y' = 1/x$ est toujours positive et $y = \text{Log } x$ est une fonction monotone croissante.

Si x tend vers $+\infty$ y tend également vers $+\infty$.

En effet d'après (chap. 1, § 3) il suffit de montrer qu'à tout nombre A positif, arbitrairement grand, on peut associer un nombre B positif tel que l'inégalité $x > B$ entraîne $\text{Log } x > A$.

La fonction étant croissante, si $x > 2^n$, $\text{Log } x > n \text{ Log } 2$ on voit que $\forall A > 0, \exists B = 2^n \left(\text{avec } n > \dfrac{A}{\text{Log } 2}\right)$ tel que $x > B \Rightarrow \text{Log } x > A$.

Si $x \to 0$, $y = \text{Log } x$ tend vers $-\infty$.

En effet, on a vu que

$\text{Log } 1/x = -\text{Log } x$; si $x \to 0$, $1/x \to +\infty$,

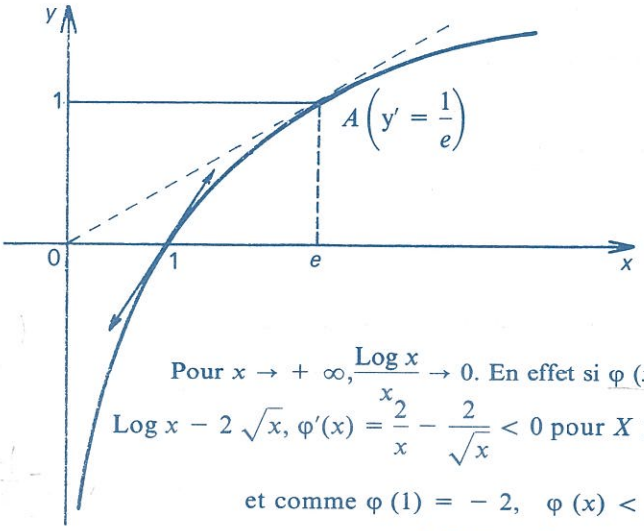
$\text{Log } 1/x \to +\infty$ et $\text{Log } x \to -\infty$.

Les résultats trouvés sont résumés dans le tableau ci-dessous.

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$	1	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Graphe de $y = \text{Log } x$

La valeur de x pour laquelle $y = 1$ est appelée base des logarithmes népériens. Ce nombre qu'on désigne par e a pour valeur 2,718 28... Il joue un rôle fondamental en Analyse Mathématique.



Pour $x \to +\infty$, $\dfrac{\text{Log } x}{x} \to 0$. En effet si $\varphi(x) = \text{Log } x - 2\sqrt{x}$, $\varphi'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} < 0$ pour $X > 1$,

et comme $\varphi(1) = -2$, $\varphi(x) < 0$ et

$$0 < \frac{\text{Log } x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \text{qui} \to 0.$$

Figure 2.

4. LOGARITHME DE BASE QUELCONQUE

Définition

On appelle logarithme de x dans le système de base a, a étant un nombre positif différent de 1, le quotient $\frac{\text{Log } x}{\text{Log } a}$, et on écrit :

$$\log_a x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a}$$

On déduit de cette définition, et des résultats relatifs à la fonction Log x que :

$\log_a x$ n'est défini que pour $x > 0$

$$\log_a x_1 x_2 = \frac{\text{Log } x_1 + \text{Log } x_2}{\text{Log } a} = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \frac{\text{Log } x_1 - \text{Log } x_2}{\text{Log } a} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

$$\log_a x^m = \frac{m \text{ Log } x}{\text{Log } a} = m \log_a x$$

$$\log_a 1 = \frac{\text{Log } 1}{\text{Log } a} = 0.$$

Ainsi se trouvent généralisées aux logarithmes de base quelconque, les propriétés du logarithme népérien.

Étude de la fonction $y = \log_a x$

La fonction $y = \log_a x$ est définie pour tout x strictement positif. Sa dérivée est

$$y' = \frac{(\text{Log } x)'}{\text{Log } a} = \frac{1}{x \text{ Log } a}.$$

Si $a > 1$, Log $a > 0$.

- y' sera toujours positif et y sera croissant.
- Lorsque $x \to +\infty$, $\log_a x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a} \to +\infty$.

– Lorsque $x \to 0$, $\log_a x \to -\infty$.

Si $a < 1$, Log $a < 0$.

– y' sera toujours négatif et y décroissant.
– Lorsque $x \to +\infty$, $\log_a x \to -\infty$.
– Lorsque $x \to 0$, $\log_a x \to +\infty$.

D'où la construction du faisceau de courbes pour les différentes valeurs de a (fig. 3).

Remarque importante :

Pour $x = a$

$$\log_a a = \frac{\text{Log } a}{\text{Log } a} = 1.$$

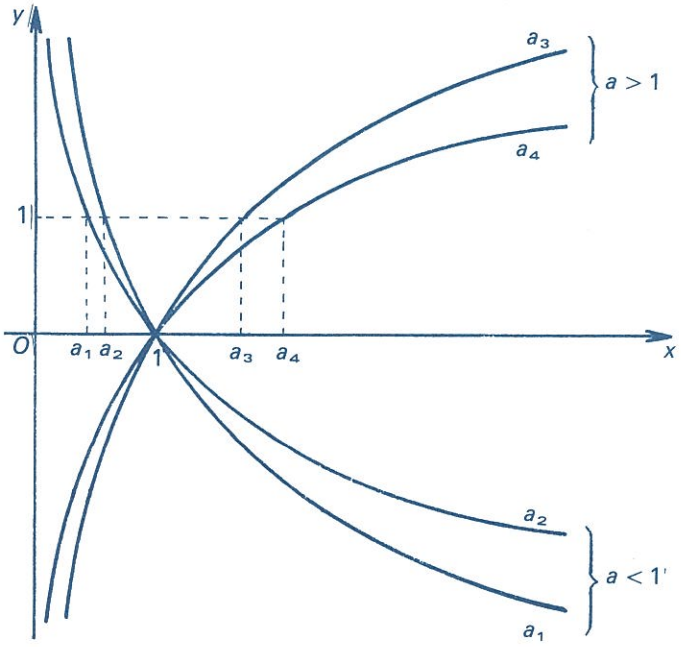


Figure 3.

5. LOGARITHMES DÉCIMAUX

Si $a = 10$, $\log_{10} x$ est appelé logarithme décimal de x, ou logarithme vulgaire. On le note généralement par log x, en omettant d'indiquer la base.

Puisque, d'une manière générale $\log_a a = 1$

$$\log 10 = 1$$

et

$$\log 10^m = m \log 10 = m$$

enfin

$$\log \frac{1}{x} = - \log x$$

se désigne également par la notation colog x.

6. FORMULE DE CHANGEMENT DE BASE

La valeur de $\log_a x = \dfrac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a}$ peut encore s'écrire :

$$\log_a x = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} b} \cdot \frac{\operatorname{Log} b}{\operatorname{Log} a}$$

soit

$$\boxed{\log_a x = \log_b x \,.\, \log_a b} \qquad (1)$$

Remarquons que :

$$\log_a b = \frac{\operatorname{Log} b}{\operatorname{Log} a} = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{Log} a}{\operatorname{Log} b}} = \frac{1}{\log_b a}$$

La formule (1) s'écrit encore :

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Cette formule, appelée formule de changement de base, permet de passer des logarithmes de base a aux logarithmes de base b.

En particulier les logarithmes décimaux $\log x$ et népériens $\operatorname{Log} x$ sont liés par les relations

$$\log x = M \operatorname{Log} x \quad \text{ou} \quad M = \log e \simeq 0{,}43429$$

$$\operatorname{Log} x = \frac{1}{M} \log x \quad \text{ou} \quad \frac{1}{M} = \operatorname{Log} 10 \simeq 2{,}30259$$

Notation.

Lorsque la base est e, nous avons utilisé la notation $\operatorname{Log} x$ pour désigner $\operatorname{Log}_e x$, c'est-à-dire le logarithme népérien de x. On rencontre souvent la notation $\ln x$ pour désigner le logarithme népérien.

7. DÉRIVÉE ET DIFFÉRENTIELLE LOGARITHMIQUES

Si $y = f(x)$, on appelle dérivée logarithmique de y la dérivée de Log y, soit :

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

De même la différentielle logarithmique est $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{f'(x).dx}{f(x)} = \dfrac{df}{f}$.

y	Dérivée logarithmique	Différentielle logarithmique
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'}{u} - \dfrac{v'}{v}$	$\dfrac{du}{u} - \dfrac{dv}{v}$
$u(x).v(x)$	$\dfrac{u'}{u} + \dfrac{v'}{v}$	$\dfrac{du}{u} + \dfrac{dv}{v}$
$[u(x)]^n$	$\dfrac{nu'}{u}$	$n\dfrac{du}{u}$
$\dfrac{[u(x)]^m}{[v(x)]^p}$	$m\dfrac{u'}{u} - p\dfrac{v'}{v}$	$m\dfrac{du}{u} - p\dfrac{dv}{v}$

Résumé du chapitre 4

FONCTION LOGARITHME

- **Définition du logarithme népérien.**

$$\text{Log } x = \int_1^x \frac{dt}{t} \Leftrightarrow (\text{Log } x)' = \frac{1}{x}$$

- **Propriétés du logarithme.**

$$\text{Log } (a.b) = \text{Log } a + \text{Log } b$$

$$\text{Log } \left(\frac{a}{b}\right) = \text{Log } a - \text{Log } b$$

$$\text{Log } (a^n) = n \text{ Log } a$$

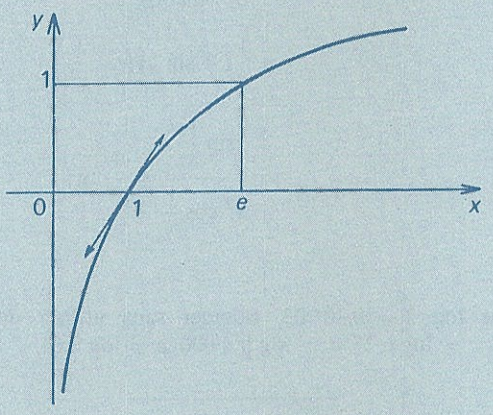
- **Logarithme de base quelconque.**

$$\log_a x = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a}$$

- **Formule de changement de base.**

$$\log_a x = \log_b x \,.\, \log_a b$$

- **Graphe de la fonction $x \to \operatorname{Log} x$.**



- **Dérivée et différentielle logarithmiques.**

La dérivée logarithmique de $y = f(x)$ est

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

sa différentielle logarithmique est

$$\frac{dy}{y} = \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \frac{d\,f(x)}{f(x)}$$

EXERCICES

■ **1.** Calculer la dérivée de

$$y = \operatorname{Log} \cos \frac{1}{x}$$

Posons

$$u = \frac{1}{x}, \; v = \cos u$$

On a alors $y = \operatorname{Log} v$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{v}(-\sin u)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2 \cos \frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$$

■ **2.** Sachant que $\log 2 = 0{,}301\,03$, calculer sans utiliser de table $a = \log 5$, $b = \log 250$, $c = \log 6{,}25$, $d = \log \sqrt{4\,000}$, $e = \log 0{,}64$.

$5 = \frac{10}{2}$; $\quad a = \log 5 = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}301\,03$

$= 0{,}698\,97$

$250 = \frac{1\,000}{2^2}$; $\quad b = \log 1\,000 - 2 \log 2$

$= 3 - 0{,}602\,06$

$= 2{,}397\,94$

$6{,}25 = (2{,}5)^2$, $\quad c = 2 \log 2{,}5 = 2 \log \frac{250}{100}$

$= 2 (\log 250 - \log 100) = 2 (2{,}397\,94 - 2)$

$= 0{,}795\,88$

$$\sqrt[2]{4\,000} = 2.10\sqrt{10}, \qquad d = \log 2 + \log 10 + \frac{1}{2}\log 10$$
$$= 0{,}301\,03 + 1 + 0{,}5$$
$$= 1.801\,03$$
$$0{,}64 = \frac{64}{100} = \frac{2^6}{10^2}, \qquad e = 6\log 2 - 2\log 10 = 6.0{,}301\,03 - 2$$
$$= \bar{1}{,}806\,18$$

■ **3.** Démontrer la relation :

$$\log_{a^n} x = \frac{\log_a x}{n}$$

et calculer :

$$\log_3 81\sqrt[3]{3},\ \log_{1/3} 27\sqrt{3},\ \log_{3\sqrt{3}} 81,\ \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt[3]{9}$$
$$\log_{1/27} 3\sqrt{27},\quad \log_9 \frac{1}{3},\quad \log_{27} \frac{1}{9}$$

Par définition

$$\log_a x = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a}$$

de même

$$\log_{a^n} x = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a^n} = \frac{\operatorname{Log} x}{n \operatorname{Log} a} = \frac{\log_a x}{n}$$

$$-\ \log_3 81\sqrt[3]{3} = \log_3 3^4 . 3^{1/3} = \log_3 3^{13/3} = \frac{13}{3}\log_3 3 = \frac{13}{3}$$

$$-\ \log_{1/3} 27\sqrt[2]{3} = \log_{1/3} 3^3 . 3^{1/2} = \log_{1/3} 3^{7/2}.$$

Or

$$\frac{1}{3} = 3^{-1} \qquad \text{d'où} \qquad \log_{1/3} 3^{7/2} = \frac{\log_3 3^{7/2}}{-1} = -\frac{7}{2}$$

$$-\ \log_{3\sqrt{3}} 81 = \log_{3^{3/2}} 3^4 = \frac{\log_3 3^4}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$$

$$-\ \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt[3]{9} = \log_{3^{1/2}} 3 . 3^{2/3} = \frac{\log_3 3^{5/3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{3}$$

$$-\ \log_{1/27} 3\sqrt{27} = \log_{3^{-3}} 3 . 3^{3/2} = \frac{\log_3 3^{5/2}}{-3} = \frac{\frac{5}{2}}{-3} = -\frac{5}{6}$$

$$-\log_9 \frac{1}{3} = \log_{3^2} 3^{-1} = \frac{\log_3 3^{-1}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$-\log_{27} \frac{1}{9} = \log_{3^3} 3^{-2} = \frac{\log_3 3^{-2}}{3} = -\frac{2}{3}$$

■ **4.** Calculer la dérivée de

$$y = \operatorname{Log} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$$

Posons

$$u = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \qquad y = \operatorname{Log} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$u' = \frac{(x^3 + 1)\,3x^2 - (x^3 - 1)\,3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$$y' = \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2} \cdot \frac{(x^3 + 1)}{x^3 - 1} = \frac{6x^2}{x^6 - 1}$$

■ **5.** Calculer les dérivées de :

$$y_1 = \operatorname{Log}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$$

$$y_2 = \operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$y_3 = x^{x^2}$$

$$y_1 = \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)'}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

$$y_2' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Pour calculer la dérivée de y_3, partons de $\operatorname{Log} y_3 = x^2 \operatorname{Log} x$

$$\frac{y_3'}{y_3} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \operatorname{Log} x$$

$$= x(1 + 2 \operatorname{Log} x)$$

et

$$y_3' = x^{x^2} \cdot x(1 + 2 \operatorname{Log} x)$$

$$= x^{x^2+1} \cdot (1 + 2 \operatorname{Log} x)$$

■ **6.** Calculer la dérivée de

$$y = \operatorname{Log} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{1 + x^2} + 1}$$

Posons

$$U = \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{1 + x^2} + 1} = \frac{u}{v}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dU}{dx} \cdot \frac{1}{U} = \frac{vu' - uv'}{v^2 \cdot U}$$

$$u' = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad v' = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}} (\sqrt{1 + x^2} + 1 - \sqrt{1 + x^2} + 1)}{(\sqrt{1 + x^2} + 1)^2 \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{1 + x^2} + 1}}$$

$$= \frac{2x}{x^2 \sqrt{1 + x^2}} = \frac{2}{x \sqrt{1 + x^2}}$$

■ **7.** Résoudre l'équation

$$2 \log (6 - x) - \log (x + 1) = \log (x - 1).$$

L'équation ci-dessus peut s'écrire

$$\log \frac{(6 - x)^2}{x + 1} = \log (x - 1)$$

et, par conséquent

$$\frac{(6 - x)^2}{x + 1} = x - 1$$

ou

$$(6 - x)^2 = x^2 - 1$$

$$36 - 12x + x^2 = x^2 - 1$$

et

$$x = \frac{37}{12}.$$

Cette valeur de x convient puisque les quantités $6 - x$, $x + 1$ et $x - 1$ sont bien positives.

■ **8.** Étudier et construire le graphe de $y = \text{Log}\,\dfrac{x-1}{x+1}$. On mettra en évidence le centre de symétrie.

---

y est défini lorsque $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$ soit pour $x < -1$ et $x > +1$.

$u = \dfrac{x-1}{x+1}$ a pour dérivée $u' = \dfrac{1\,.\,(x+1) - 1\,(x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

u est donc une fonction croissante de x, il en est de même de Log u puisque la fonction logarithmique est une fonction croissante.

Lorsque $x \to \pm\infty$ $u \to 1$ et $y \to 0$
Lorsque $x \to 1$ $u \to 0$ et $y \to -\infty$
Lorsque $x \to -1$ $u \to +\infty$ et $y \to +\infty$.

Le changement de x en $-x$ conduit à :

$$\text{Log}\,\frac{-x-1}{-x+1} = \text{Log}\,\frac{x+1}{x-1} = -\,\text{Log}\,\frac{x-1}{x+1} = -y$$

La fonction y est donc impaire et l'origine des coordonnées est centre de symétrie.

D'où le tableau :

x	0	1	$+\infty$
y		$-\infty$ ↗	0

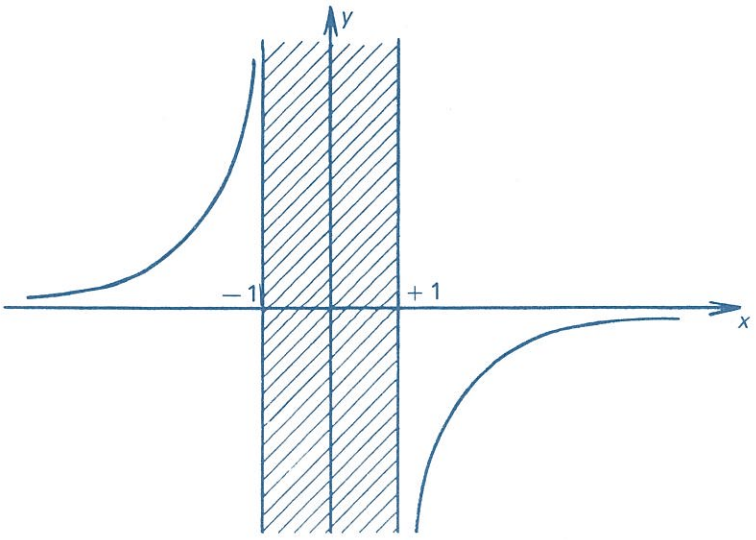


Figure 4.

■ **9.** n étant un entier $\geqslant 1$, on pose $f_n(x) = x^{n-1}\ \mathrm{Log}\ x$ $(x > 0)$. Démontrer que la dérivée d'ordre n de cette fonction est $f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)\,!}{x}$.

On vérifie immédiatement que $f_1'(x) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{0\,!}{x}$ et que $f_2''(x) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1\,!}{x}$.

Raisonnons par récurrence et supposons que $f_{n-1}^{(n-1)}(x) = \dfrac{(n-2)\,!}{x}$.

Comme on a $f_n(x) = x\ f_{n-1}(x)$, la formule de Leibniz permet d'écrire

$$f_n^{(n)}(x) = x\ f_{n-1}^{(n)}(x) + C_n^1\ f_{n-1}^{(n-1)}(x)$$

$$= x\left[-\frac{(n-2)\,!}{x^2}\right] + n \cdot \frac{(n-2)\,!}{x} = \frac{(n-1)(n-2)\,!}{x} = \frac{(n-1)\,!}{x}$$

Il en résulte que la formule proposée est bien exacte pour tout n entier $\geqslant 1$.

■ **10.** Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{\mathrm{Log}\ x}{x}$$

Cette fonction est définie pour $x > 0$.

La dérivée de y est de la forme $\dfrac{vu' - uv'}{v^2}$ avec $u = \mathrm{Log}\ x$ et $u' = \dfrac{1}{x}$ $v = x$ et $v' = 1$, d'où

$$y' = \frac{1 - \mathrm{Log}\ x}{x^2}$$

y' sera positif pour $\mathrm{Log}\ x < 1$ soit $x < e$, y atteint son maximum pour $x = e$ et vaut alors $\dfrac{1}{e}$.

Valeurs aux limites.

Lorsque $x \to 0$ $\mathrm{Log}\ x \to -\infty$, $\dfrac{1}{x} \to +\infty$ et $y \to -\infty$.

Lorsque $x \to +\infty$ $\mathrm{Log}\ x \to +\infty$, mais le quotient $\dfrac{\mathrm{Log}\ x}{x}$ tend vers 0.

Tableau de variations.

x	0		1		e		$+\infty$
y'	‖	$+$	1	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	0

Graphe.

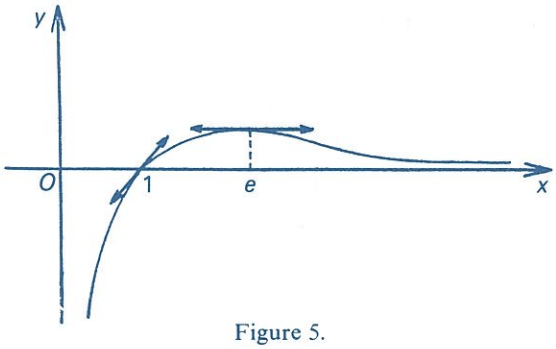


Figure 5.

CHAPITRE 5

FONCTION EXPONENTIELLE

Nous avons vu que pour définir la fonction réciproque d'une fonction $f(x)$, il fallait que $f(x)$ soit définie, continue et monotone.

Ces trois conditions sont bien vérifiées par la fonction logarithme.

1. DÉFINITION DE LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a ($a \neq 1$)

La fonction $\log_a x$ ($a > 0$) est définie, continue et strictement monotone dans l'intervalle $]0, \infty[$; elle prend ses valeurs dans l'intervalle $]-\infty, \infty[$. Par conséquent, il existe une fonction réciproque $x = \varphi(y)$ définie, continue et strictement monotone dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ et prenant ses valeurs dans l'intervalle $]0, +\infty[$. Cette fonction qu'on appelle exponentielle de base a est donc strictement positive :

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = \exp_a (y).$$

2. ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Revenons à la notation x et y pour désigner respectivement la variable indépendante et une fonction y de cette variable.

La quantité $y = \exp_a (x)$ s'identifie à a^x, ou ce qui est équivalent

$$\boxed{x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x}$$

En effet :

1) *x est entier ou rationnel.*

Dans ce cas, on peut mettre x sous la forme

$$x = \frac{p}{q}$$

p et q étant entiers. Puisque $\log_a a = 1$, nous avons

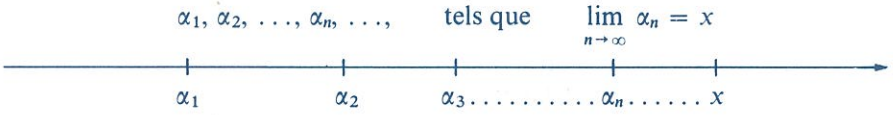
$$x = \frac{p}{q} = \frac{p}{q} \log_a a = \log_a a^{p/q} = \log_a y$$

et

$$y = a^{p/q} = a^x$$

2) *x est irrationnel.*

Nous admettrons que pour tout nombre irrationnel x il existe une suite de nombres rationnels



On démontre que pour toute fonction continue φ, la suite

$$\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \ldots, \varphi(\alpha_n)$$

tend vers $\varphi(x)$ lorsque $n \to \infty$. Nous définirons donc la quantité $\mathrm{Exp}_a(x)$ pour x irrationnel, comme limite de $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2} \ldots a^{\alpha_n}$, lorsque, pour

$$n \to \infty, \mid x - \alpha_n \mid \to 0,$$

et nous la noterons a^x.

Propriétés de la fonction exponentielle.

Calcul de $a^x \cdot a^{x'}$.

Prenons le logarithme de base a de cette quantité

$$\begin{aligned} \log_a (a^x \cdot a^{x'}) &= \log_a a^x + \log_a a^{x'} \\ &= x \log_a a + x' \log_a a \\ &= x + x' \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{a^x \cdot a^{x'} = a^{x+x'}}$$

Calcul de $(a^x)^{x'}$.

$$\begin{aligned} \log_a (a^x)^{x'} &= x' \log_a a^x = xx' \log_a a \\ &= xx' \end{aligned}$$

on en conclut que :

$$\boxed{(a^x)^{x'} = a^{xx'}}$$

Remarque.

En remplaçant y par $\log_a x$ dans la relation $x = a^y$ (relation équivalente à $y = \log_a x$) on obtient l'égalité fondamentale :

$$x = a^{\log_a x}$$

3. ÉTUDE DE LA FONCTION $y = a^x$ POUR LES DIFFÉRENTES VALEURS POSITIVES DE a

$y = a^x$ est toujours définie, continue et monotone, sa fonction réciproque ayant ces propriétés.

Dérivée de $y = a^x$.

Nous avons vu que les dérivées de deux fonctions réciproques ont pour produit + 1 :

si

$$x = \log_a y = \frac{\operatorname{Log} y}{\operatorname{Log} a}$$

$$x'_y = \frac{1}{y \operatorname{Log} a} = \frac{1}{a^x \operatorname{Log} a}$$

d'où

$$y'_x = (a^x)' = a^x \operatorname{Log} a.$$

En particulier si $a = e$ (base des logarithmes népériens) $y = e^x$ a pour dérivée $e^x \operatorname{Log} e$ soit e^x :

> *La fonction a^x est proportionnelle à sa dérivée. La fonction $y = e^x$ est égale à sa dérivée.*

Pour $a > 1$, $\operatorname{Log} a > 0$, $y' > 0$. Dans ce cas $y = a^x$ est une fonction croissante.

Pour $a < 1$, $\operatorname{Log} a < 0$, $y' < 0$: $y = a^x$ est une fonction décroissante.

Remarque : ces deux résultats s'obtiennent également par la considération des fonctions réciproques $y = \log_a x$.

Donc $y = a^x$ *est une fonction croissante pour* $a > 1$, *et décroissante pour* $a < 1$.

Le faisceau des courbes $y = a^x$, pour les différentes valeurs de a positives, se construit aisément, à partir du faisceau des courbes représentant $\log_a x$ pour les différentes valeurs de a, (cf. chap. 4, paragraphe 4), puisque les courbes représentatives de deux fonctions réciproques, sont symétriques par rapport à la bissectrice $y = x$ des axes Ox, Oy.

Pour $x = 0$, $y = a^0 = 1$: le faisceau des exponentielles passe par le point (0, 1).

En particulier, les courbes représentatives de $y = e^x$ et $y = e^{-x}$ s'obtiennent aisément par symétrie, à partir de la courbe $y = \text{Log } x$.

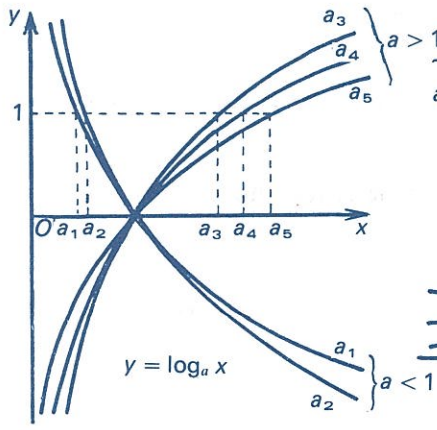


Figure 1.

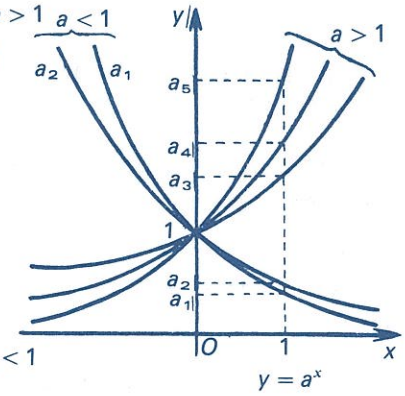
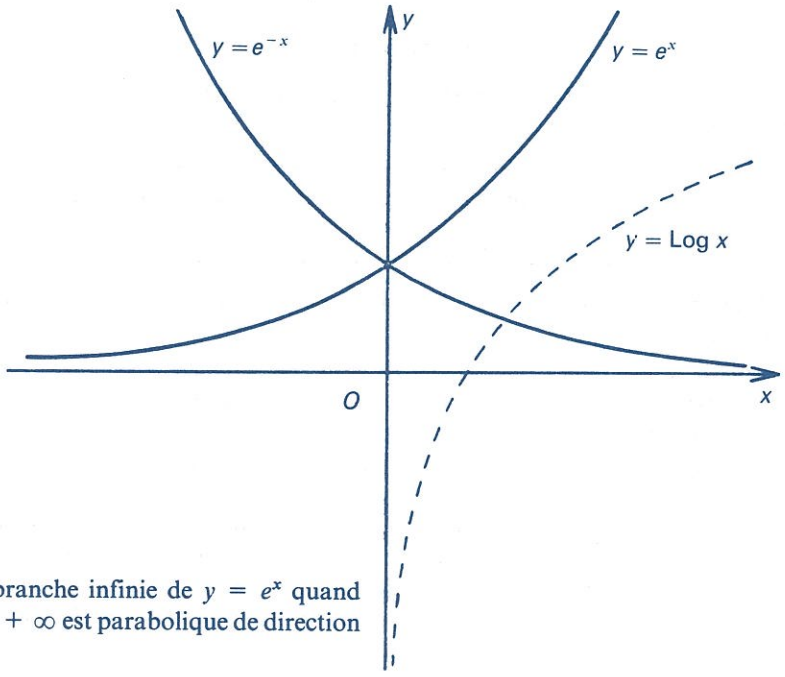


Figure 2.



La branche infinie de $y = e^x$ quand $x \to + \infty$ est parabolique de direction Oy.

Figure 3.

4. CROISSANCE COMPARÉE DES FONCTIONS Log x, a^x, x^m AVEC $m > 0$ ET $a > 1$ LORSQUE $x \to +\infty$

Lorsque $x \to \infty$ $\quad \operatorname{Log} x \to \infty$

$a^x \to \infty$ pour $a > 1$

$x^m \to \infty$ pour $m > 0$.

Nous nous proposons de comparer la rapidité de croissance des fonctions a^x, x^m et $\operatorname{Log} x$ quand $x \to \infty$ pour établir les résultats importants suivants :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^m} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^m}{\operatorname{Log} x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{Log} x = 0$$

a) Le développement de Mac Laurin jusqu'à l'ordre $n + 1$ de e^x est :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} e^{\theta x}$$

avec $0 < \theta < 1$ (cf. chap. 7, paragraphe 5 [1]).

Pour $x > 0$

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

et

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}$$

Lorsque $x \to \infty$ il en est de même de $\dfrac{e^x}{x^n}$.

Or $\forall\, m$ on peut prendre pour n un entier quelconque plus grand que m si

$$m < n \Leftrightarrow x^m < x^n \qquad \text{dès que} \qquad x > 1$$

et

$$\frac{e^x}{x^m} > \frac{e^x}{x^n}$$

Comme $\dfrac{e^x}{x^n} \to +\infty$ avec x, il en est de même de $\dfrac{e^x}{x^m}\ \forall\, m$.

---

[1] Formule que nous admettrons provisoirement.

Généralisation.

S'il s'agit de comparer a^x et x^m lorsque $x \to \infty$ il suffit d'écrire :

$$a^x = e^{x \operatorname{Log} a}$$

et

$$\frac{a^x}{x^m} = \frac{e^{x \operatorname{Log} a}}{x^m} = \frac{e^X}{X^m} (\operatorname{Log} a)^m$$

en posant $X = x \operatorname{Log} a$.

Comme $\frac{e^X}{X^m}$ tend vers l'infini avec x puisque $\operatorname{Log} a > 0$, $\frac{a^x}{x^m}$ tend vers l'infini également.

b) Comparons les rapidités de croissance de x^m et $\log_a x$ lorsque x tend vers l'infini. Soit :

$$y = \frac{x^m}{\log_a x}$$

Posons

$$\log_a x = X \quad \Leftrightarrow \quad x = a^X$$

$$y = \frac{(a^X)^m}{X} = \frac{a^{mX}}{X} = \frac{ma^{X'}}{X'} \qquad \text{avec} \qquad X' = mX$$

Lorsque $x \to \infty$

$$X = \operatorname{Log}_a x \to \infty \qquad \text{et} \qquad X' \to \infty$$

d'après *a*) $\frac{a^{X'}}{X'} \to \infty$ et de même $y \to \infty$.

On conclut de *a*) et *b*) que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^m} = +\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^m}{\log_a x} = +\infty$$

donc en particulier

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{\operatorname{Log} x} = +\infty$$

c) Lorsque $x \to 0$

$$\operatorname{Log} x \to -\infty$$

et $x \operatorname{Log} x$ se présente sous la forme indéterminée $\infty \times 0$.

Posons

$$x = \frac{1}{X};$$

$$x \log x = \frac{1}{X} \operatorname{Log} \frac{1}{X} = -\frac{\operatorname{Log} X}{X}$$

Or lorsque $x \to 0$

$$X \to \infty \qquad \text{et} \qquad -\frac{\operatorname{Log} X}{X} \to 0 \text{ d'après } b)$$

d'où

$$\lim_{x \to 0} x \log x = 0$$

Résumé du chapitre 5

FONCTION EXPONENTIELLE

- **Définition.**

$$x = \log_a y \Leftrightarrow y = \exp_a(x) = a^x$$

avec $a > 0$.

- **Propriétés.**

$\forall\, x, x' \in \mathbb{R}$

$$a^x \cdot a^{x'} = a^{x+x'}$$
$$(a^x)^{x'} = a^{xx'}$$

- **Dérivée.**

Si $y = a^x$

$$y' = a^x \operatorname{Log} a$$

Pour $a = e$ (base des logarithmes népériens) $y = e^x$ et $y' = e^x$.

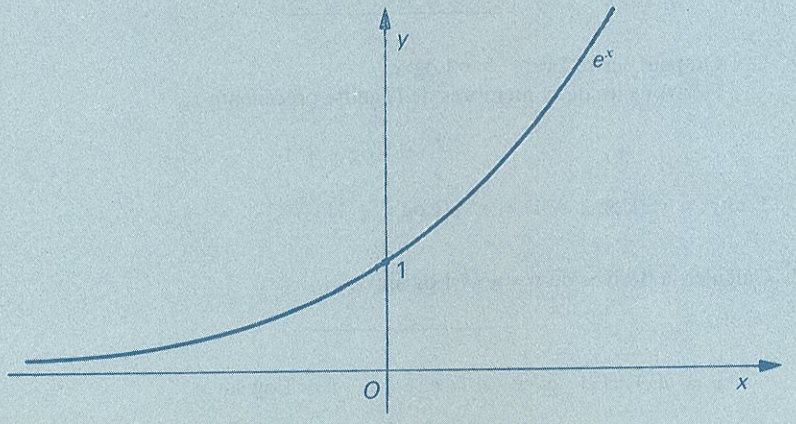


Figure 4.

● **Comparaison de croissance des fonctions a^x, x^m, $\log_a x$.**

Pour $a > 1$ et $m > 0$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x^m} = + \infty \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^m}{\log_a x} = + \infty$$

En particulier :

$\frac{\text{Log } x}{x}$	tend vers 0 lorsque x tend vers $+ \infty$
$x \text{ Log } x$	tend vers zéro lorsque $x \to 0$
$\frac{e^x}{x^m}$	tend vers $+ \infty$ lorsque x tend vers $+ \infty$, $\forall m$
$\frac{x^m}{(\log_a x)^n}$	tend vers l'infini $\forall m > 0$ lorsque $x \to \infty$

EXERCICES

■ **1.** Calculer la dérivée de $y = x^x$.

On peut écrire $\text{Log } y = x \text{ Log } x$.
Dérivons les deux membres de l'égalité précédente :

$$\frac{y'}{y} = \text{Log } x + 1$$

d'où $y' = y.(\text{Log } x + 1) = x^x . (\text{Log } x + 1)$.

■ **2.** Calculer la dérivée de $y = e^{-\frac{x}{2}} \text{ Log sin } x$.

$y = u(x) . v(x)$ avec $u = e^{-\frac{x}{2}}$ et $v = \text{Log sin } x$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$$

Pour calculer $\frac{dv}{dx}$, posons $w = \sin x$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = \frac{1}{\sin x} \cos x = \operatorname{cotg} x$$

d'où

$$y' = \operatorname{cotg} x \,.\, e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \,.\, \operatorname{Log} \sin x$$

$$= e^{-\frac{x}{2}} \left(\operatorname{cotg} x - \frac{\operatorname{Log} \sin x}{2} \right)$$

■ **3.** Sachant que $y^x = x^y$, calculer y'_x.

La relation précédente est équivalente à

$$x \operatorname{Log} y = y \operatorname{Log} x$$

Dérivons les deux membres de cette égalité :

$$\operatorname{Log} y + \frac{xy'}{y} = \frac{y}{x} + y' \operatorname{Log} x$$

on en tire

$$y' = \frac{\operatorname{Log} y - \frac{y}{x}}{\operatorname{Log} x - \frac{x}{y}}$$

■ **4.** $f(x)$ est une fonction continue vérifiant $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

$$f(x) \neq 0 \tag{1}$$

$$f(x + y) = f(x) \,.\, f(y) \tag{2}$$

1) calculer $f(0)$,

2) montrer que $f(1) > 0$ et calculer $f(n)$ pour tout entier n relatif, en fonction de $f(1)$.

3) calculer $f(\alpha)$, α étant un nombre rationnel de signe quelconque,

4) montrer que la relation ci-dessus caractérise la fonction exponentielle.

---

1) Faisons $x = y = 0$, il vient :

$$f(0) = [f(0)]^2$$

et puisque $f(0) \neq 0$, $f(0) = 1$.

2) Pour $x = y = \frac{1}{2}$, nous obtenons

$$f(1) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \quad \text{et puisque} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0, \quad f(1) > 0$$

Posons $f(1) = a$

$$f(2) = [f(1)]^2 = a^2$$

$$f(3) = f(2) \cdot f(1) = a^3$$

il est aisé de généraliser par récurrence :

$$f(n) = a^n.$$

De même $f(-1) = \left[f\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 > 0$

$$f(0) = 1 = f(-1) \cdot f(1)$$

$$f(-1) = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{a}$$

$$f(-2) = [f(-1)]^2 = \frac{1}{a^2}$$

plus généralement quel que soit le signe de n

$$f(n) = a^n.$$

3) D'après la relation (2) on voit que :

$$f(nx) = [f(x)]^n$$

α étant rationnel on a $\alpha = \frac{p}{q}$ (p, q entiers)

$$f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = a^p = \left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q$$

et

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a^{\frac{p}{q}}.$$

4) Les relations (1) et (2) caractérisent bien la fonction exponentielle car pour tout x irrationnel il existe une suite α_n de nombres rationnels ayant x pour limite. $f(x)$ étant supposée continue

$$\lim_{n \to \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \to \infty} a^{\alpha_n} = a^x$$

■ **5.** Étudier les variations de la fonction

$$y = x^x$$

Cette fonction est définie et continue pour $x > 0$ seulement. Calculons la dérivée de y en considérant le logarithme de y :

$$\text{Log } y = x \text{ Log } x$$

en dérivant les deux membres, on obtient :

$$\frac{y'}{y} = \text{Log } x + 1$$

d'où $$y' = x^x (\text{Log } x + 1)$$

x^x étant toujours positif, y' est du signe de Log $x + 1$.

Log $x + 1$ s'annule pour Log $x = -1$, soit pour $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ y atteint donc son minimum pour $x = \frac{1}{e}$ et vaut $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

Tableau de variations.

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	1	$+$	
y	1	↘	$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$	↗	1	↗	$+\infty$

Valeurs aux limites.

Si $x \to +\infty$ $y \to +\infty$ et $\frac{y}{x} \to +\infty$ (branche parabolique $0y$).

Si $x \to 0$ $y = x^x = e^{x \text{ Log } x}$ tend vers 1, car x Log $x \to 0$ et $y' \to -\infty$.

D'où le graphe :

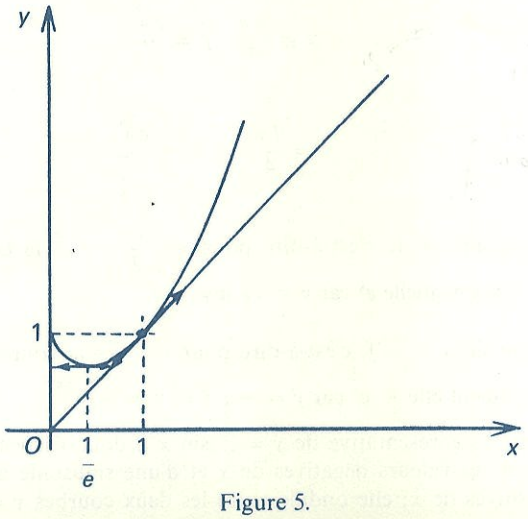


Figure 5.

■ **6.** Étudier la fonction $y = e^x \sin x$.

Cette fonction est toujours définie et continue; lorsque x augmente de 2π, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ et

$$y(x + 2\pi) = e^{2\pi}e^x \sin x = e^{2\pi}\, y(x).$$

On peut donc se limiter à l'intervalle $(0, 2\pi)$ et les autres arcs correspondants à $(4\pi, 6\pi)$, $(6\pi, 8\pi)$ et d'une manière générale à $(2K\pi, 2K\pi + 2\pi)$ se déduiront du 1er arc par une translation parallèle à Ox suivie d'une dilatation ou d'une contraction de $e^{2K\pi}$ suivant que K est positif ou négatif. La dérivée de y est $y' = e^x(\sin x + \cos x)$ elle s'annule pour $\sin x = -\cos x$, soit dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ pour les valeurs $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.

On en déduit le tableau de variations :

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
y'	1	$+$	0	$-$	0	$+$	2
y	0	↗	Max	↘	Min	↗	0

Pour

$$x = \frac{3\pi}{4} \quad y = \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$$

Pour

$$x = \frac{7\pi}{4} \quad y = -\frac{e^{\frac{7\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$$

Lorsque $\sin x = 1$, c'est-à-dire pour $x = \frac{\pi}{2}$ $y = e^{\frac{\pi}{2}}$ la courbe étudiée est tangente à l'exponentielle e^x car $y = e^{\frac{\pi}{2}}$ et $y' = e^{\frac{\pi}{2}}$.

Lorsque $\sin x = -1$, c'est-à-dire pour $x = \frac{3\pi}{2}$ la courbe étudiée est tangente à l'exponentielle $-e^x$ car $y = -e^{\frac{3\pi}{2}}$ et $y' = -e^{\frac{3\pi}{2}}$.

La courbe représentative de $y = e^x \sin x$ a donc l'aspect d'une sinusoïde amortie pour les valeurs négatives de x et d'une sinusoïde amplifiée pour les valeurs positives de x; elle ondule entre les deux courbes $y = e^x$ et $y = -e^x$.

Graphe.

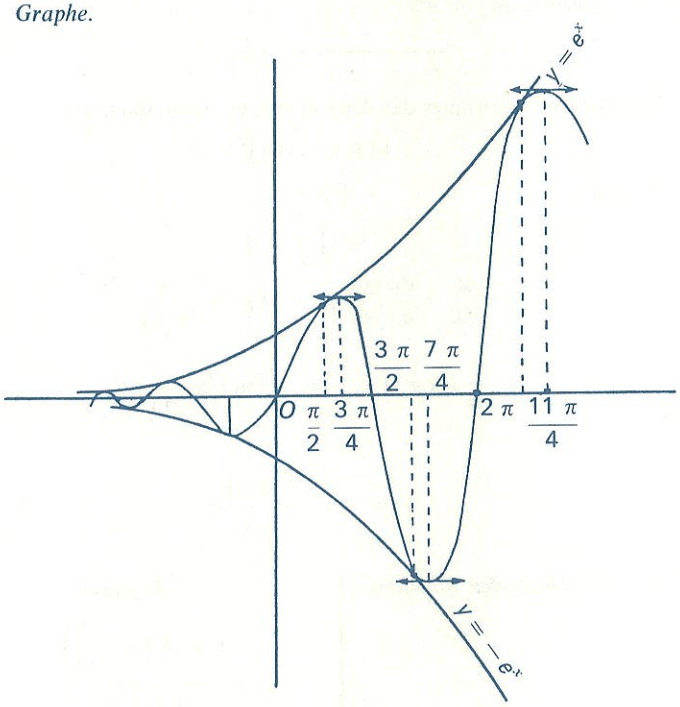


Figure 6.

■ **7.** Calculer la dérivée de

$$y = \frac{(2x - 1)^5}{3(x^2 + 2)^3}$$

La dérivée logarithmique de y est

$$\frac{y'}{y} = 5\frac{2}{2x - 1} - 3\frac{2x}{x^2 + 2}$$

$$= \frac{10(x^2 + 2) - 6x(2x - 1)}{(2x - 1)(x^2 + 2)}$$

$$= \frac{-2x^2 + 6x + 20}{(2x - 1)(x^2 + 2)}$$

On en tire y' :

$$y' = \frac{-2(x^2 - 3x - 10)(2x - 1)^4}{3(x^2 + 2)^4}$$

■ **8.** Calculer la dérivée de $y = e^{\cos \sqrt{x}}$.

Prenons les logarithmes des deux membres, nous obtenons :

$$\text{Log } y = \cos \sqrt{x}$$

Posons $\sqrt{x} = u$

et $\cos \sqrt{x} = v$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{Log } y) = \frac{y'}{y} = -\sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

et

$$y' = -\frac{e^{\cos \sqrt{x}} \sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

■ **9.** ***Calculer les dérivées des fonctions***

	Réponses
$y = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$	$y' = \dfrac{1 + e^{\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{(1 + e^{\frac{1}{x}})^2}$
$y = x\, e^{-\frac{1}{x}}$	$y' = e^{-\frac{1}{x}}\left(\dfrac{x + 1}{x}\right)$
$y = \text{Arc cos } e^{\sqrt{x}}$	$y' = -\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x(1 - e^{2\sqrt{x}})}}$
$y = (\sin x)^{\sin x}$	$y' = (\sin x)^{\sin x} \cdot \cos x \cdot (1 + \text{Log sin } x)$
$y = x^{\sin x}$	$y' = x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x} + \cos x \text{ Log } x\right)$
$y = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x + 2)}$	$y' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{x^2 - 2}{x\sqrt{x(x + 2)}}$

CHAPITRE 6

FONCTIONS HYPERBOLIQUES DIRECTES ET INVERSES

1. FONCTIONS HYPERBOLIQUES DIRECTES

Par définition on appelle cosinus hyperbolique de x, qu'on note ch x la quantité

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

de même le sinus hyperbolique de x est

$$\boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

On constate que

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$$

et que

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$$

par conséquent

$$\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1}$$

Par analogie avec les lignes trigonométriques la tangente hyperbolique de x est

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

2. ÉTUDE DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Étude de la fonction $f(x) = \text{ch } x$

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

L'étude précédente des fonctions exponentielles montre que $f(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs $f(-x) = f(x)$ l'intervalle d'étude peut être réduit à $\mathbb{R}^+$.

Sens de variation.

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{(\text{ch } x)' = \text{sh } x}$$

Or pour $x > 0$ $e^x > 1$ donc $e^{-x} = \frac{1}{e^x} < 1$ et $f'(x) > 0$, la fonction ch x est monotone croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Tableau de variation.

x	0		$+\infty$
y'	0	+	
$y = \text{ch } x$	1	↗	∞

Branches infinies. .

Si $x \to +\infty$

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \to +\infty$$

et

$$\frac{\text{ch } x}{x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2x} = \frac{e^x}{2x} + \frac{1}{2e^x \cdot x} \to +\infty$$

La courbe représentative de $y = \text{ch } x$ admet donc une branche parabolique dans la direction de Oy.

Par ailleurs on peut écrire

$$\text{ch } x = \frac{e^x}{2}(1 + e^{-2x})$$

qui montre que ch x et $\frac{e^x}{2}$ sont deux infiniment grands équivalents lorsque $x \to \infty$.

La différence $\text{ch } x - \frac{e^x}{2} = e^{-2x}$ tend vers 0 par valeurs positives lorsque $x \to \infty$, ce qui permet de tracer le graphe de $y = \text{ch } x$ asymptotique de $\frac{e^x}{2}$, (fig. 1).

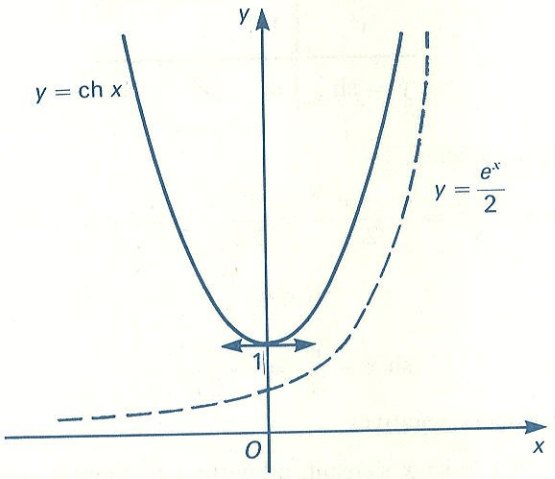


Figure 1.

Remarque.

En mécanique, on démontre que la position prise par un fil souple et inextensible suspendu entre deux points peut être décrite par une équation de la forme $y = a \text{ ch } \frac{x}{a}$, si les axes sont convenablement choisis, ce qui justifie l'appellation de **chaînette** donnée à la courbe représentant le cosinus hyperbolique.

Fonction sinus hyperbolique $f(x) = \text{sh } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

La fonction sinus hyperbolique est par construction même définie et continue sur $\mathbb{R}$, $\text{sh } (-x) = -\text{sh } (x)$ donc c'est une fonction impaire dont l'intervalle d'étude est $\mathbb{R}^+$

Sens de variation.

$$(\text{sh } x)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2}$$

soit

$$\boxed{(\text{sh } x)' = \text{ch } x}$$

Des propriétés de $\operatorname{ch} x > 0$ nous déduisons que $f(x)$ est monotone croissante.

Tableau de variation.

x	0		∞
y'	1	$+$	
$y = \operatorname{sh} x$	0	↗	∞

Étude des branches infinies.

$$\text{Si } x \to +\infty, \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{e^x}{2x} - \frac{1}{2e^x \cdot x} \to +\infty$$

$$\operatorname{sh} x \sim \frac{e^x}{2}$$

et

$$\operatorname{sh} x - \frac{e^x}{2} = -\frac{1}{2e^x \cdot x}$$

tend vers 0 par valeurs négatives.

Le graphe de $y = \operatorname{sh} x$ s'ensuit, admettant O comme point de symétrie, la tangente en O ayant pour pente $+1$ (fig. 2).

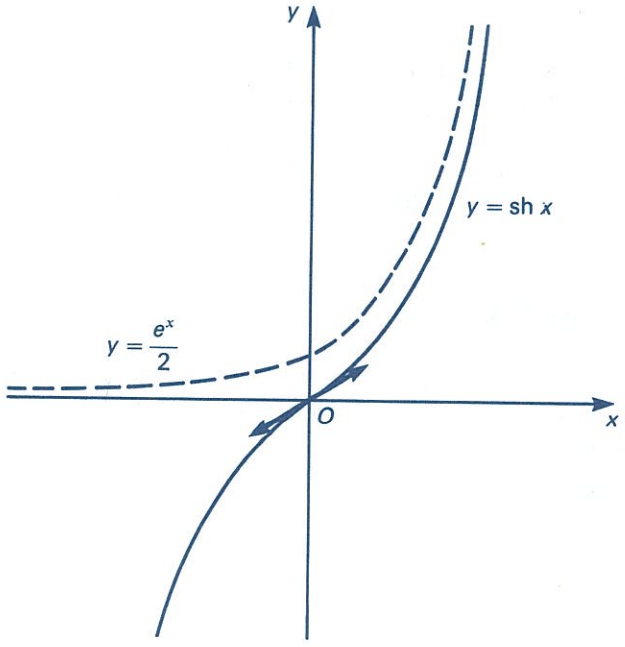


Figure 2.

On remarquera que $y'(O) = 1$ entraîne que

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1}$$

Fonction tangente hyperbolique th $x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$

Comme ch $x > 0$, th x est définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus sh x étant impaire et ch x paire th x est une fonction impaire de x et sera étudiée sur $\mathbb{R}^+$.

Sens de variation.

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

et th x est une fonction monotone croissante.

On voit de plus que lorsque $x \to + \infty$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \text{ tend vers 1.}$$

Tableau de variation.

x	0		$+\infty$
y'	1	$+$	
$y = \operatorname{th} x$	0	$\longrightarrow$	1

Du fait que O est un centre de symétrie puisque th x est une fonction impaire, les doites $y = 1$ et $y = -1$ sont les deux asymptotes de $y = \operatorname{th} x$. Pour $x = 0$, $y = 0$ et $y' = 1$ qui nous donne la pente à l'origine, ce qui montre que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{th} x}{x} = 1$.

Il s'ensuit le graphe figure 3.

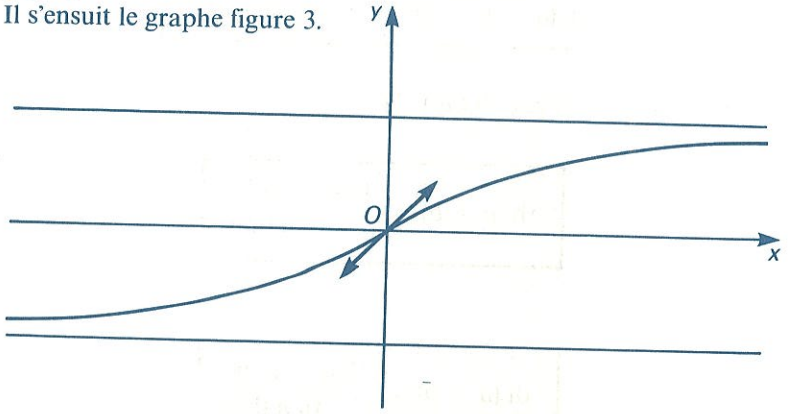


Figure 3. .

3. RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Des égalités établies au paragraphe 1

$$e^{a} = \operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a$$

$$e^{-a} = \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a$$

on tire

$$e^{a+b} = (\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a)(\operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b)$$

$$e^{-(a+b)} = (\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a)(\operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b)$$

soit en additionnant membre à membre et divisant par 2 :

$$\boxed{\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}$$

d'où

$$\boxed{\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}$$

et en soustrayant membre à membre après division par 2

$$\boxed{\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b}$$

et

$$\boxed{\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b}$$

et en divisant $\operatorname{sh}(a+b)$ par $\operatorname{ch}(a+b)$

$$\boxed{\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}}$$

d'où

$$\boxed{\operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}}$$

Remarque : Transformation des sommes en produit.

En posant $a + b = p$ et $a - b = q$ les formules d'addition précédentes peuvent s'exprimer comme suit

$$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p-q}{2} \operatorname{ch} \frac{p+q}{2}$$

Et on retrouve également, après réduction au même dénominateur

$$\operatorname{th} p + \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p+q)}{\operatorname{ch} p \,.\, \operatorname{ch} q}$$

$$\operatorname{th} p - \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p-q)}{\operatorname{ch} p \,.\, \operatorname{ch} q}$$

4. FORMULES DE MULTIPLICATION OU DE DIVISION PAR 2

En faisant $b = a$ dans les formules précédentes nous obtenons

$$\boxed{\operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a}$$

$$\boxed{\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a}$$

$$\boxed{\operatorname{th} 2a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}}$$

Et tenant compte de l'égalité

$$\operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a = 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{ch} 2a &= 1 + 2 \operatorname{sh}^2 a \\ \operatorname{ch} 2a &= 2 \operatorname{ch}^2 a - 1 \end{aligned}}$$

ou
et

$$\boxed{\begin{aligned} 1 + \operatorname{ch} 2a &= 2 \operatorname{ch}^2 a \\ 1 - \operatorname{ch} 2a &= -2 \operatorname{sh}^2 a \end{aligned}}$$

5. EXPRESSIONS DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES EN FONCTION DE $\operatorname{th} \frac{a}{2} = t$

Si dans la formule donnant sh 2 a on remplace a par $\frac{a}{2}$ nous obtenons

$$\operatorname{sh} a = 2 \operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{a}{2}$$

On ne change rien en divisant par $\operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{a}{2}$ qui est égal à 1 d'où

$$\operatorname{sh} a = \frac{2 \operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{a}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{a}{2}}$$

soit en divisant par $\operatorname{ch}^2 \frac{a}{2}$ et avec $\operatorname{th} \frac{a}{2} = t$

$$\boxed{\operatorname{sh} a = \frac{2t}{1 - t^2}}$$

De même

$$\operatorname{ch} a = \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{a}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{a}{2}}$$

ou

$$\boxed{\operatorname{ch} a = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}}$$

et

$$\boxed{\operatorname{th} a = \frac{2t}{1 - t^2}}$$

On rapprochera toutes ces formules de celles qui concernent les lignes trigonométriques.

6. FONCTIONS HYPERBOLIQUES INVERSES OU RÉCIPROQUES

Définition de la fonction Argument cosinus hyperbolique

La fonction inverse du cosinus hyperbolique se note Arg ch x et se définit par l'équivalence

$$y = \text{Arg ch } x \quad \text{avec } x \geqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \text{ch } y \quad \text{avec } y \geqslant 0$$

Arg ch x est continue et croissante et réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Calcul de la dérivée.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\text{sh } y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2 y - 1}}$$

$$\boxed{(\text{Arg ch } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}$$

Remarque.

Dans le cas où $y < 0$, la fonction inverse est $-$ Arg ch x, définie elle aussi pour $x \geqslant 1$ et sa dérivée est

$$\frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Courbe représentative.

Les courbes représentatives de ch x et de Arg ch x sont symétriques par rapport à la première bissectrice, d'où les graphes les représentant :

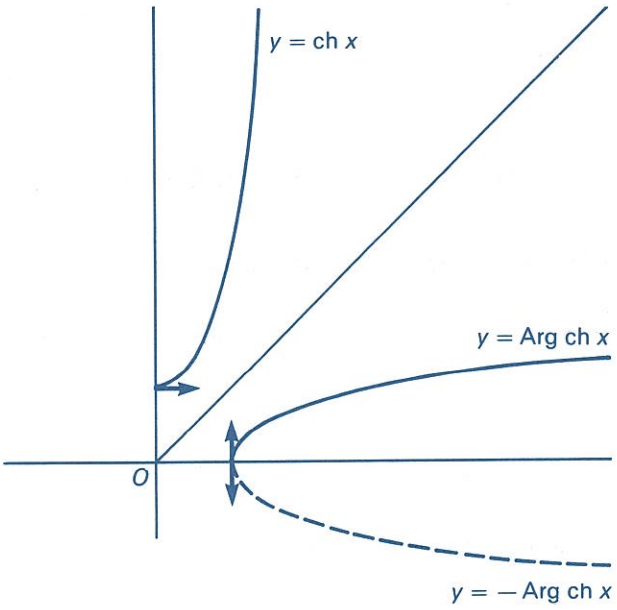


Figure 4.

Expression logarithmique de l'argument ch x

De l'expression $\begin{cases} y = \text{Arg ch } x \\ x \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{ch } y \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

on tire $2x = e^y + e^{-y}$

soit en posant $Y = e^y$, $Y^2 - 2xY + 1 = 0$.

Le discriminant de cette équation du second ordre en Y est positif ou nul puisque $x \geqslant 1$. Le produit des racines est 1, la somme est $2x > 0$ seule est à conserver la racine supérieure à 1 pour représenter $Y = e^y$

$$Y = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

soit $y = \text{Log}(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Fonction inverse du sinus hyperbolique

sh x, définie quel que soit x, réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ sa fonction inverse, argument sinus hyperbolique notée Arg sh x, est définie $\forall x$ par

$$\boxed{y = \text{Arg sh } x \Leftrightarrow x = \text{sh } y}$$

Calcul de la dérivée.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\operatorname{ch} y}$$

$$\operatorname{ch}^2 y = 1 + \operatorname{sh}^2 y$$

$$\operatorname{ch} y = \sqrt{1 + x^2}$$

puisque $\operatorname{ch} y > 0$

$$\boxed{\operatorname{Arg\,sh}\, x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}}$$

Courbe représentative.

Les courbes représentatives de sh x et Arg sh x sont symétriques par rapport à la première bissectrice, le point O étant un centre de symétrie.

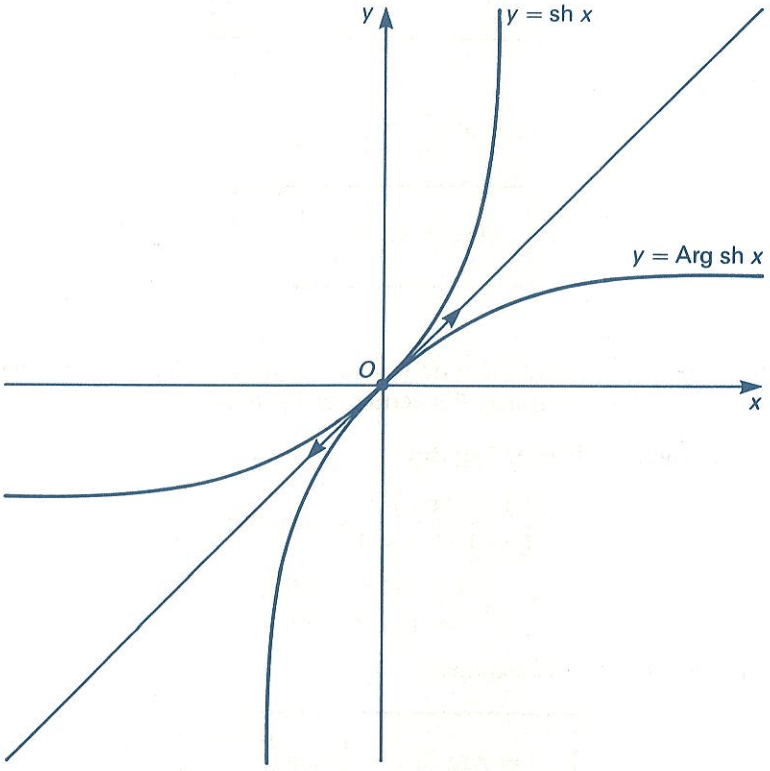


Figure 5.

Expression logarithmique de Arg sh x

$$y = \text{Arg sh } x \Leftrightarrow x = \text{sh } y$$

soit $2x = e^y - e^{-y}$

en posant $Y = e^y$, $\quad Y^2 - 2xY - 1 = 0$

et en ne conservant que la racine positive

$$Y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

soit

$$\boxed{y = \text{Arg sh } x = \log (x + \sqrt{x^2 + 1})}$$

Fonction inverse de la tangente hyperbolique

La fonction inverse de la tangente hyperbolique est la fonction Argument tangente hyperbolique notée Arg th et est définie par

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \text{Arg th } x \Leftrightarrow x = \text{th } y \\ -1 < x < 1 \end{array}}$$

Calcul de la dérivée.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 - \text{th}^2 y}$$

$$\boxed{(\text{Arg th } x)' = \frac{1}{1 - x^2}}$$

Courbe représentative.

Les courbes représentatives de $y = \text{th } x$ et de $y = \text{Arg th } x$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (cf. fig. 6, ci-contre).

Expression logarithmique de Arg th x

$$\begin{cases} y = \text{Arg th } x \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \text{th } y$$

soit

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

d'où on tire comme précédemment

$$\boxed{y = \text{Arg th } x = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1 + x}{1 - x}}$$

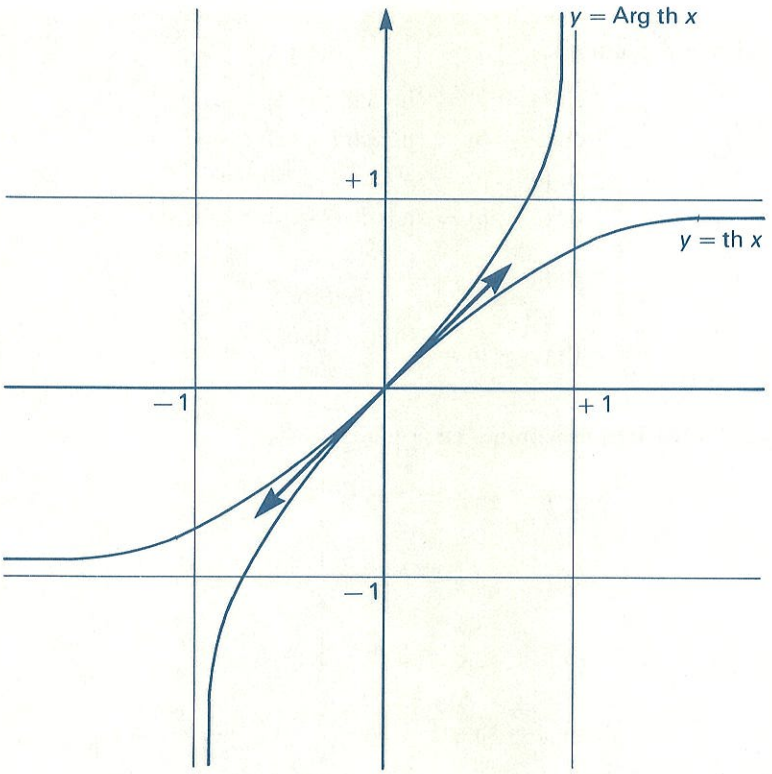


Figure 6.

Résumé du chapitre 6

- **Définitions.**

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- **Relations fondamentales.**

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$$
$$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$$
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

- **Formules d'additions.**

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$
$$\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$
$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a$$
$$\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a$$
$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$
$$\operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

- **Transformations de sommes en produits.**

$$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}$$
$$\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}$$
$$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}$$
$$\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p-q}{2} \operatorname{ch} \frac{p+q}{2}$$
$$\operatorname{th} p + \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p+q)}{\operatorname{ch} p \,.\, \operatorname{ch} q}$$
$$\operatorname{th} p - \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p-q)}{\operatorname{ch} p \,.\, \operatorname{ch} q}$$

- **Formules de multiplication par 2.**

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} 2a &= \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a \\
&= 2 \operatorname{ch}^2 a - 1 \\
&= 2 \operatorname{sh}^2 a + 1 \\
&= \frac{1 + \operatorname{th}^2 a}{1 - \operatorname{th}^2 a} \\
\operatorname{sh} 2a &= 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a \\
&= \frac{2 \operatorname{th} a}{1 - \operatorname{th}^2 a} \\
\operatorname{th} 2a &= \frac{2 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}
\end{aligned}$$

● **Fonctions hyperboliques inverses.**

$$y = \text{Arg ch } x \Leftrightarrow x = \text{ch } y \begin{cases} x \geqslant 1 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y = \text{Log}\,(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$y = \text{Arg sh } x \Leftrightarrow x = \text{sh } y, \forall\, x$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$y = \text{Log}\,(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$y = \text{Arg th } x \Leftrightarrow x = \text{th } y, |x| < 1$$

$$y' = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$y = \frac{1}{2}\,\text{Log}\,\frac{1 + x}{1 - x}$$

EXERCICES

■ **1.** θ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, exprimer sh x, ch x et th x en fonction de lignes trigonométriques de θ, sachant que :

$$x = \text{Log tg}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Exprimer θ en fonction de x.

Posons

$$\text{tg}\,\frac{\theta}{2} = t, \quad \text{alors} \quad x = \text{Log}\,\frac{1 + t}{1 - t}$$

ou

$$e^x = \frac{1 + t}{1 - t}$$

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + t}{1 - t} - \frac{1 - t}{1 + t}\right) = \frac{2t}{1 - t^2} = \text{tg } \theta$$

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + t}{1 - t} + \frac{1 - t}{1 + t}\right) = \frac{1 + t^2}{1 - t^2} = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{\text{tg } \theta}{\dfrac{1}{\cos \theta}} = \sin \theta.$$

Comme $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$, on peut écrire successivement

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = e^x,$$

$$\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} = \operatorname{Arc\,tg}\, e^x$$

$$\theta = 2 \operatorname{Arc\,tg}\, e^x - \frac{\pi}{2}$$

Les deux fonctions $x(\theta)$ et $\theta(x)$, inverses l'une de l'autre, sont respectivement appelées « amplitude hyperbolique de θ », et « gudermannien de x ».

■ **2.** Étudier la fonction

$$y = \operatorname{Arc\,sin}(\operatorname{Arg\,sh} x).$$

Graphe.

Arc sin u est définie pour $-1 \leqslant u \leqslant 1$. Donc y est définie pour

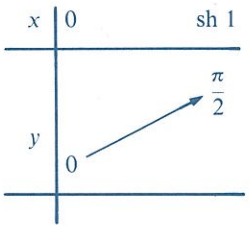
$$-1 \leqslant \operatorname{Arg\,sh} x \leqslant 1$$

soit :

$$-\operatorname{sh} 1 \leqslant x \leqslant \operatorname{sh} 1$$

Par ailleurs Arc sin u et Arg sh u sont impaires. Donc y est elle-même impaire. Nous prendrons donc $[0, \operatorname{sh} 1]$ pour intervalle d'étude.

La variation de y est immédiate car Arc sin et Arg sh sont deux fonctions croissantes. y est donc elle-même croissante. D'où le tableau de variation



$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\operatorname{Arg\,sh} x)^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Le calcul de y' permet de placer les tangentes pour $x = 0$ (qui est $y = x$) et $x = \text{sh } 1$ (parallèle à Oy). D'où le graphe :

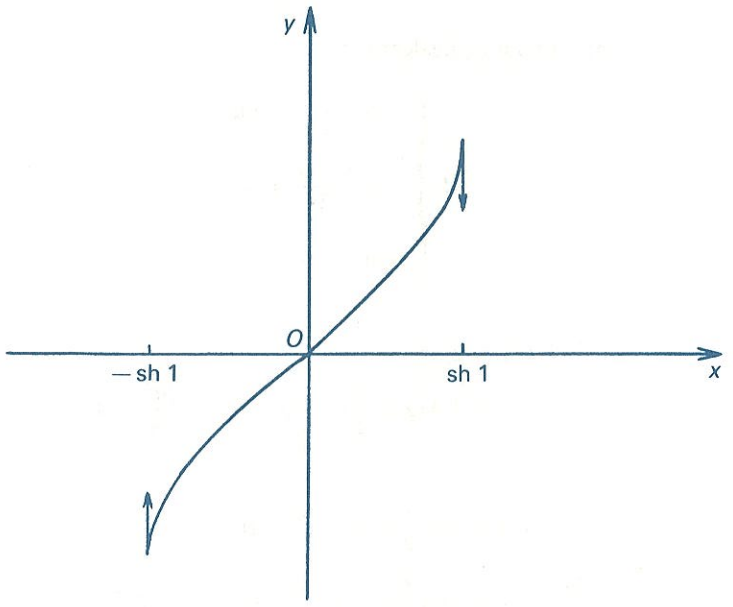


Figure 7.

3. Résoudre le système

$$\text{I} \begin{cases} \text{ch } x + \text{ch } y = a \text{ ch } \alpha \\ \text{sh } x + \text{sh } y = a \text{ sh } \alpha \end{cases} \qquad a, \alpha \in \mathbb{R}$$

On sait que

$$\text{ch } x + \text{ch } y = 2 \text{ ch } \frac{x + y}{2} \text{ ch } \frac{x - y}{2} \tag{1}$$

$$\text{sh } x + \text{sh } y = 2 \text{ ch } \frac{x - y}{2} \text{ sh } \frac{x + y}{2} \tag{2}$$

En élevant au carré et en soustrayant membre à membre, on a :

$$4 \text{ ch}^2 \left(\frac{x - y}{2} \right) = a^2$$

ce qui implique

$$\frac{a^2}{4} \geqslant 1 \tag{3}$$

Mais la première équation du système implique $a > 0$ donc (3) se réduit à $a \geqslant 2$ et

$$a = 2 \operatorname{ch} \frac{x - y}{2}$$

Le système I a pour équivalent II :

$$\text{II} \begin{cases} \operatorname{ch} \dfrac{x + y}{2} = \operatorname{ch} \alpha \\ \operatorname{sh} \dfrac{x + y}{2} = \operatorname{sh} \alpha \\ 2 \operatorname{ch} \dfrac{x - y}{2} = a \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x + y = 2\alpha \\ x - y = 2 \operatorname{Arg\,ch} \dfrac{a}{2} = 2 \operatorname{Log} \left(\dfrac{a}{2} + \sqrt{\dfrac{a^2}{4} - 1} \right) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x = \alpha + \operatorname{Log} \dfrac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 - 4}) \\ y = \alpha - \operatorname{Log} \dfrac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 - 4}) \quad \text{et} \quad a \geqslant 2 \end{cases}$$

4. Calculer les dérivées de

$$y = \operatorname{Arc\,tg} (\operatorname{th} x)$$

et

$$z = \operatorname{Arc\,tg} (\operatorname{sh} 2x)$$

puis en déduire la relation liant y et z.

Trouver une relation analogue liant

$$u = \operatorname{Arg\,th} (\operatorname{tg} x)$$

et

$$v = \operatorname{Arg\,th} (\sin 2x)$$

$$y' = \frac{(\operatorname{th} x)'}{1 + \operatorname{th}^2 x} = \frac{1 - \operatorname{th}^2 x}{1 + \operatorname{th}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} 2x}$$

$$z' = \frac{(\operatorname{sh} 2x)'}{1 + \operatorname{sh}^2 2x} = \frac{2 \operatorname{ch} 2x}{\operatorname{ch}^2 2x}$$

On voit ainsi que

$$z' = 2y' \qquad \text{ce qui entraîne} \qquad z = 2y + K.$$

$\forall x$ réel, car y et z sont définies et continues sur $\mathbb{R}$.

Mais pour $x = 0$, $y = z = 0$ d'où $K = 0$.
Donc Arc tg (sh 2 x) = 2 Arc tg (th x), $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

De même

$$u' = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\cos 2x}$$

$$v' = \frac{2 \cos 2x}{1 - \sin^2 2x} = \frac{2}{\cos 2x}$$

$v' = 2u'$.

Mais $u(x)$ et $v(x)$ ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$: il faut $|\operatorname{tg} x| < 1$ et $|\sin 2x| < 1$, et comme la période commune à u et v est π, nous retiendrons le domaine de définition commun à u et v : $\left]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right[$ (mod. π).

Sur cet intervalle, u et v sont continues, donc $v = 2u + \lambda$, λ étant une constante.

$x = 0$ fournit $\lambda = 0$, donc

$$\text{Arg th } (\sin 2x) = 2 \text{ Arg th } (\operatorname{tg} x),$$

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right[, \qquad k \text{ entier.}$$

■ **5.** Pour quelles valeurs de la variable réelle x les fonctions 2 Arg ch x et Arg ch $(2x^2 - 1)$ sont-elles définies ?
Quelles sont les dérivées de ces fonctions ? Conclusion ?

---

a) $f(x) = 2$ Arg ch x est définie pour $x \geqslant 1$.

$g(x) =$ Arg ch $(2x^2 - 1)$ est définie pour $2x^2 - 1 \geqslant 1$,

c'est-à-dire $x \geqslant 1$ et $x \leqslant -1$.

b)
$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$g'(x) = \frac{4x}{\sqrt{(2x^2 - 1)^2 - 1}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2(x^2 - 1)}}$$

$$= \frac{4x}{2|x|\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2x}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

si $x \geqslant 1$ $\quad g'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $\quad$ si $x \leqslant -1$ $\quad g'(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

et donc pour $x \geqslant 1$ ($f(x)$ et $g(x)$ sont alors toutes deux définies)

$$f'(x) = g'(x) \quad \text{soit} \quad f(x) - g(x) = K.$$

Pour calculer K prenons $x = 1$.

$$K = f(1) - g(1) = 2 \operatorname{Arg\,ch} 1 - \operatorname{Arg\,ch} 1 = \operatorname{Arg\,ch} 1 = 0.$$

Donc pour $x \geqslant 1$

$$2 \operatorname{Arg\,ch} x = \operatorname{Arg\,ch} (2x^2 - 1).$$

Ce résultat se retrouve, sans utiliser la dérivation, en posant $\operatorname{Arg\,ch} x = y$: alors $x = \operatorname{ch} y$,

$$2x^2 - 1 = 2 \operatorname{ch}^2 y - 1 = \operatorname{ch} 2y,$$

et $g(x) = \operatorname{Arg\,ch} (\operatorname{ch} 2y) = 2y$ puisque $y \geqslant 0$.

CHAPITRE 7

FORMULE DE TAYLOR DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS APPLICATIONS

1. THÉORÈME DE ROLLE

Soit $f(x)$ une fonction de x vérifiant les conditions suivantes :

- $f(x)$ est définie et continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$,
- $f(x)$ possède une dérivée pour toute valeur de l'intervalle ouvert $]a, b[$,
- $f(x)$ est telle que $f(a) = f(b) = 0$.

Alors, il existe au moins une valeur c de l'intervalle ouvert $]a, b[$ pour laquelle la dérivée est nulle : $f'(c) = 0$.

La figure 1 illustre graphiquement le théorème de Rolle. Il existe au moins un point C de la courbe où la tangente est parallèle à Ox.

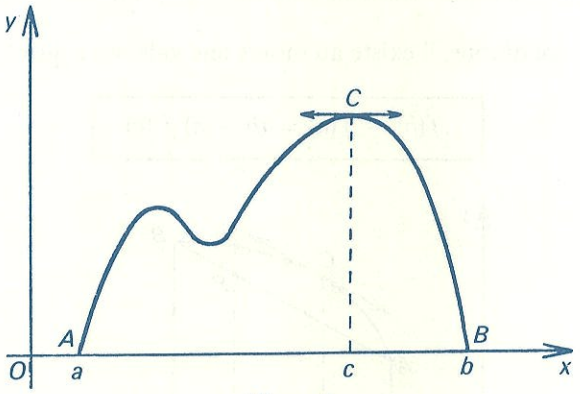


Figure 1.

Ce théorème s'établit comme suit :

Si $f(x)$ est constante sur $[a, b]$, alors $\forall\, c \in [a, b]\ f'(c) = 0$ et la propriété est bien vérifiée.

Dans le cas général, $f(x)$ admet sur $[a, b]$ une borne inférieure m et une borne supérieure M. On peut supposer que l'une au moins de ces bornes, M par exemple, est distincte de $f(b)$ car autrement $f(x)$ se réduirait à une constante.

La fonction $f(x)$ étant continue, elle atteint pour au moins une valeur c de la variable la valeur M avec $c \in]a, b[$.

Or la dérivée $f'(c)$ qui existe nécessairement est la limite de

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

quand h tend vers 0 d'une manière quelconque.

Or $f(c) = M$, borne supérieure de $f(x)$ sur $[a, b]$

$$f(c + h) - f(c) < 0$$

si $h > 0 \dfrac{f(c + h) - f(c)}{h} < 0 \Rightarrow f'(c) \leqslant 0$

si $h < 0 \dfrac{f(c + h) - f(c)}{h} > 0 \Rightarrow f'(c) \geqslant 0$

donc $f'(c) = 0$.

2. FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS

Supposons que la fonction $f(x)$ est définie et continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et qu'elle admet une dérivée finie $f'(x)$ sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Dans ces conditions, il existe au moins une valeur $c \in]a, b[$ telle que

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$$

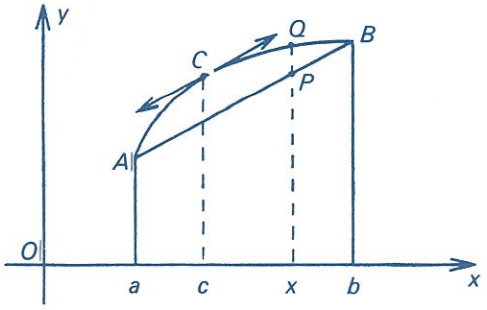


Figure 2.

L'interprétation graphique de cette formule apparaît sur la figure 2 : en un point C de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ la tangente est parallèle à la corde AB

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Démonstration.

Considérons la fonction

$$\varphi(x) = \overline{PQ} = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$\varphi(x)$ mesure la différence des ordonnées du point Q sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et du point P de la corde AB, tous deux d'abscisse x.

Nous remarquons que :

$$\varphi(a) = 0$$
$$\varphi(b) = 0$$

La fonction $\varphi(x)$ vérifie les conditions du théorème de Rolle : il existe une valeur $c \in [a, b]$ telle que $\varphi'(c) = 0$. Or

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

soit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ce qui démontre la formule.

Théorème des accroissements finis généralisés

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ et si $g'(x)$ ne s'annule pas sur $]a, b[$, il existe une valeur c de $]a, b[$ telle que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Introduisons la fonction auxiliaire

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \lambda\,[g(x) - g(a)]$$

avec $$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

on vérifie aisément que

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

Les hypothèses requises par le théorème de Rolle sont vérifiées pour $\varphi(x)$.

Il existe donc $c \in]a, b[$ telle que $\varphi'(c) = 0$.

Or $$\varphi'(c) = f'(c) - \lambda g'(c)$$

d'où $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (1)$$

Règle de L'Hospital

Supposons $f(a) = g(a) = 0$.
Si $x \in]a, b[$, on a d'après (1)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

et si lorsque $x \to a$, $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ tend vers une limite l alors cette limite n'est autre que celle de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ lorsque $x \to a$.

Donc si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

La réciproque n'est cependant pas vérifiée. Il se peut en effet que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ admette une limite, sans que $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ en admette.

3. APPLICATIONS AUX VARIATIONS DE FONCTIONS

1. Si une fonction $y = f(x)$ est constante dans un intervalle, sa dérivée est nulle dans cet intervalle, car on a $\Delta y = 0$ et il s'ensuit que $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

2. Si une fonction $f(x)$ est croissante dans un intervalle, sa dérivée est positive ou exceptionnellement nulle dans cet intervalle. En effet $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ étant positif, sa limite $f'(x)$ quand $\Delta x \to 0$, est positive ou nulle.

3. Si une fonction $f(x)$ est décroissante dans un intervalle, sa dérivée est négative ou exceptionnellement nulle (même raisonnement que précédemment).

Réciproquement :

Soit x_1 et x_2 deux valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b) où $f(x)$ est définie.

La formule des accroissements finis permet d'écrire :

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c).$$

1) Si $f'(x) = 0$ dans l'intervalle $[ab]$, $f'(c) = 0$ et $f(x_2) = f(x_1)$. La fonction $f(x)$ est constante dans l'intervalle $[a, b]$.

2) Si $f'(x) > 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ en particulier $f'(c) > 0$ d'où

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \qquad \text{et } f(x) \text{ est croissante.}$$

3) Si $f'(x) < 0$ $f(x)$ est décroissante (même raisonnement que précédemment).

4. FORMULE DE TAYLOR

Théorème.

Si une fonction $y = f(x)$ est définie et continue sur $[a, b]$, ainsi que ses n premières dérivées, et si elle admet dans l'intervalle $[a, b]$ une dérivée d'ordre $n + 1$, il existe une valeur $c \in]a, b[$ pour laquelle :

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(b - a)^3 f'''(a)}{3!} + \ldots + \frac{(b - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c)$$

égalité qu'on peut encore écrire avec $b - a = h$:

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h)^{(1)}$$

avec $0 < \theta < 1$.

Démonstration.

Posons

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b - x) f'(x) - \ldots - \frac{(b - x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{(b - x)^{n+1} A}{(n + 1)!}$$

où A est une constante définie par $\varphi(a) = 0$.

$\varphi(x)$ satisfait aux hypothèses du théorème de Rolle :

– $\varphi(x)$ est continue sur $[a, b]$ puisque les n premières dérivées de $f(x)$ sont continues sur $[a, b]$.

– $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

(1) La forme $R_n = \dfrac{h^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h)$ est le « reste de Lagrange ».

Il existe donc une valeur $c \in]a, b[$ telle que

$$\varphi'(c) = 0$$

calculons $\varphi'(x)$: on obtient successivement en dérivant chaque terme

$$\begin{array}{ll} 0 & -f'(x) \\ +f'(x) & -(b-x)f''(x) \\ +(b-x)f''(x) & -\dfrac{(b-x)^2}{2!}f'''(x) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ +\dfrac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(x) & -\dfrac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) \\ +\dfrac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) & -\dfrac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) \\ +\dfrac{(b-x)^n}{n!}A. & \end{array}$$

Après simplification il reste :

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!}[A - f^{(n+1)}(x)]$$

et puisque $\varphi'(c) = 0$ on a nécessairement

$$A = f^{(n+1)}(c)$$

5. FORMULE DE MAC LAURIN

Dans le cas particulier où $0 \in [a, b]$ on a pour tout $x \in [a, b]$

$$f(x) = f(0) + \frac{xf'(0)}{1!} + \frac{x^2 f''(0)}{2!} + \ldots + \frac{x^n f^{(n)}(0)}{n!} + \frac{x^{n+1} f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}$$

avec $0 < \theta < 1$

où la quantité

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

est appelée reste de Lagrange.

Cette formule est un cas particulier de celle de Taylor dans laquelle on prend $a = 0$ et $b = x$.

6. NOTIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Une fonction $f(x)$ définie au voisinage de $x = x_0$ admet un développement limité d'ordre n, s'il existe un polynôme de degré n

$$P_n(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + \ldots + a_n (x - x_0)^n$$

tel que

$$f(x) = P_n(x) + \varepsilon \cdot (x - x_0)^n$$

où ε tend vers 0 lorsque $x \to x_0$.

$P_n(x)$ est la partie régulière du développement, $\varepsilon (x - x_0)^n$ est le terme complémentaire ou reste, qu'on peut noter $o((x - x_0)^n)$ [1].

Remarque.

Posons $X = x - x_0$. Lorsque $x \to x_0$, $X \to 0$. On peut donc se ramener à un développement limité au voisinage de 0. Aussi nous limiterons-nous dans la suite à la considération de développements limités au voisinage de 0.

Propriétés des développements limités

1) *Unicité.*

Une fonction ne peut admettre qu'un seul développement limité d'ordre n donné.

2) *Somme.*

Si $f(x)$ et $g(x)$ admettent des développements limités d'ordre n, $f(x) + g(x)$ admet un développement limité dont la partie régulière est la somme des parties régulières de $f(x)$ et $g(x)$.

3) *Produit.*

La partie régulière du développement limité à l'ordre n de $f(x) \cdot g(x)$ se compose des termes de degré au plus égal à n du produit des parties régulières de $f(x)$ et $g(x)$.

4) *Quotient.*

La partie régulière du développement limité à l'ordre n de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ s'obtient en divisant suivant les puissances croissantes la partie régulière du développement de $f(x)$ par celle de $g(x)$ jusqu'à l'ordre n.

Justifions succinctement ces quatre propriétés.

1) Si $f(x)$ admettait deux développements limités à l'ordre n

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$

et

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + o(x^n)$$

---

[1] $o((x - x_0)^n)$ est infiniment petit par rapport à $(x - x_0)^n$.

nous aurions

$$\lim_{x \to 0} f(x) = a_0 = b_0$$

donc

$$a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n) = b_1 x + \ldots + b_n x^n + o(x^n)$$

en divisant par x les deux termes de cette égalité et en faisant tendre x vers 0 il vient $a_1 = b_1$.

De proche en proche on montre ainsi que les coefficients de même rang sont égaux.

2) Si $$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$

et $$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + o(x^n)$$

$$f(x) + g(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)\, x + \ldots + (a_n + b_n)\, x^n + o(x^n)$$

où $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ tend vers 0 lorsque $x \to 0$.

3) $A(x)$ et $B(x)$ étant les parties régulières des développements de $f(x)$ et $g(x)$ on a :

$$f(x) = A(x) + o(x^n)$$
$$g(x) = B(x) + o(x^n)$$

$$f(x) \,.\, g(x) = A(x) \,.\, B(x) + o(x^n)$$

Isolons dans le produit $A(x) \,.\, B(x)$ la partie de degré au plus égal à n, $C(x)$:

$$A(x) \,.\, B(x) = C(x) + o(x^n)$$

et en remplaçant $A(x) \,.\, B(x)$ dans l'expression de $f(x) \,.\, g(x)$ nous obtenons :

$$f(x) \,.\, g(x) = C(x) + o(x^n)$$

où $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

4) Supposons $b_0 \neq 0$.

Soit $Q(x)$ le quotient de degré n de $A(x)$ par $B(x)$, suivant les puissances croissantes. Le reste commence par x^{n+1}

$$A(x) = B(x) \,.\, Q(x) + x^{n+1} \,.\, R(x)$$

$R(x)$ peut être nul si la division se fait exactement. L'expression ci-dessus s'écrit encore

$$f(x) = g(x)\, Q(x) + o(x^n)$$

ou $$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + o(x^n)$$

Formation des développements limités

La formule de Mac Laurin, relative à une fonction $f(x)$ satisfaisant aux conditions de Taylor et dans un intervalle contenant 0 est :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2 f''(0)}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

avec $0 < \theta < 1$.

Or le reste

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

peut s'écrire :

$$R_n = x^n \left[\frac{x}{n+1} f^{(n+1)}(\theta x) \right] = x^n \varepsilon(x)$$

et puisque $f^{(n+1)}(\theta x)$ est borné, la quantité entre crochets tend vers 0 avec x. La formule de Mac Laurin donne donc le développement limité à l'ordre n de $f(x)$; et $x^n \varepsilon(x)$, où $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, est le reste de Young.

Développements limités des fonctions usuelles

1. *Développements limités de* $\sin x$ *et* $\cos x$

$$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin(x + \pi) \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \qquad f'''(0) = -1$$

. . . . . .

$$f^n(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right); \qquad f^{(n)}(0) \begin{cases} = 0, & \text{si } n = 2p \text{ est pair} \\ = (-1)^p & \text{si } n = 2p+1 \text{ est impair} \end{cases}$$

d'où

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$

Par la même méthode on obtient

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

2. Appliquons la formule de Mac Laurin à $(h + x)^m$ et déduisons les développements limités de :

$$\sqrt{1 + x}, \sqrt{1 - x}, \frac{1}{\sqrt{1 + x}}, \frac{1}{\sqrt{1 - x}}, \frac{1}{1 + x^2}$$

à l'ordre 3.

$$\begin{aligned} f(x) &= (h + x)^m & f(0) &= h^m \\ f'(x) &= m(h + x)^{m-1} & f'(0) &= mh^{m-1} \\ f''(x) &= m(m - 1)(h + x)^{m-2} & f''(0) &= m(m - 1)h^{m-2} \end{aligned}$$

. . . . . .

$$f^{(p)}(x) = m(m - 1)(m - 2) \ldots (m - p + 1)(h + x)^{m-p}$$

et $\quad f^{(p)}(0) = m(m - 1) \ldots (m - p + 1)h^{m-p}.$

D'où

$$(h + x)^m = h^m + mh^{m-1}x + \frac{m(m - 1)h^{m-2}x^2}{2!} + \ldots + \frac{m(m - 1)(m - 2) \ldots (m - p + 1)}{p!} h^{m-p}x^p + o(x^p) \qquad (1)$$

où $o(x^p)$ est un infiniment petit par rapport à x^p.

Pour $h = 1$ et en donnant successivement à m les valeurs $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ il vient :

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3).$$

Le changement de x en $-x$ donne :

$$\sqrt{1 - x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + o(x^3).$$

Enfin pour $m = -1$ et en remplaçant x par x^2

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + o(x^2).$$

D'une façon générale (1) conduit à

$$(1 + x)^\alpha = 1 + x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots (\alpha - p + 1)}{p!}x^p + o(x^p)$$

formule valable $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$.

On admettra les trois résultats suivants concernant les développements limités :

Développement limité d'une fonction composée

Si $f(u)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de u_0, et si $u = g(x)$ admet un développement limité d'ordre $p \leqslant n$ au voisinage de x_0, u_0 étant égal à $g(x_0)$ alors la fonction $y = f\,[g(x)]$ admet un développement limité d'ordre p pour $x = x_0$.

Intégration d'un développement limité

Nous admettons que si $f(x)$ continue dans $[a, b]$ admet un développement limité d'ordre n pour $x_0 \in [a, b]$ la fonction $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ admet pour $x \in [a, b]$ un développement limité d'ordre $n + 1$ dont la partie entière est obtenue en intégrant la partie entière du développement de $f(x)$.

Dérivation d'un développement limité

Si $f(x)$ est indéfiniment dérivable sur $[a, b]$ et si $0 \in [a, b]$, $f'(x)$ admet un développement limité d'ordre $(n - 1)$ qui s'obtient par dérivation terme à terme de celui de $f(x)$ à l'ordre n.

Développements limités usuels (suite)

Développements limités de e^x, sh x, ch x, tg x, th x, Log $(1 - x)$, Log $(1 + x)$, Arc tg x, Arg sh x, Arc sin x

Par application de la formule de Mac Laurin à l'origine, on obtient pour e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

où on désigne par $o(x^n)$ la quantité $x^n \cdot \varepsilon(x)$ [1].

En opérant de même pour sh x et ch x, les dérivés $n^{\text{ième}}$ pour $x = 0$ se calculent immédiatement :

$$\text{sh } x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$

$$\text{ch } x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

---

[1] Cette notation, due à Landau désigne par $o(x^n)$ tout infiniment petit par rapport à x^n.

Le développement limité de tg x s'obtient par division du développement de sin x par celui de cos x

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7)}$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

Il en est de même pour celui de th x

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

En partant de la formule (1) du binôme généralisé, et pour $h = 1$, on obtiendra par intégration ([2]) les développements limités de Log $(1 - x)$ Log $(1 + x)$, Arc tg x, Arg sh x, Arc sin x, etc.

Pour $m = -1$ on a :

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n) \qquad (2)$$

Or si $f(x) = \operatorname{Log}(1 + x)$, $f(0) = 0$, donc

$$\operatorname{Log}(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n + 1} + o(x^{n+1})$$

le changement de x en $-x$ donne :

$$\operatorname{Log}(1 - x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n + 1} + o(x^{n+1})\right.$$

En remplaçant x par x^2 dans (2) et en intégrant on obtient

$$\operatorname{Arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} + o(x^{2n+2})$$

On obtient de même en remplaçant x par $-x^2$

$$\operatorname{Arg\,th} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} + o(x^{2n+2})$$

([2]) La constante d'intégration s'identifie pour $x = 0$.

Dans le développement de

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^3 + \ldots (-1)^n \frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4.6.2n}x^n + o(x^n)$$

en remplaçant x par x^2 on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^6 + \ldots + (1)^n \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

et en intégrant

$$\text{Arg sh } x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

en changeant x en $-x^2$ dans le développement de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, et en intégrant, on trouve :

$$\text{Arc sin } x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Remarque importante.

Si $f(x)$ admet un développement limité au voisinage de 0, elle est équivalente au premier terme non nul de son développement, lorsque $x \to 0$.

Des développements ci-dessus on déduit :

$\left.\begin{array}{l}\sin x\\ \text{tg } x\\ \text{Arc sin } x\\ \text{Arc tg } x\\ \text{sh } x\\ \text{th } x\\ \text{Arg sh } x\\ \text{Arg th } x\\ \text{Log}(1+x)\\ e^x - 1\end{array}\right\}$ sont équivalents à x lorsque $x \to 0$

alors que

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

$$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$$

lorsque $x \to 0$.

7. APPLICATIONS A LA RECHERCHE DES LIMITES

Infiniment petit.

On dit que $f(x)$ est un infiniment petit au voisinage de 0, si $f(x)$ tend vers 0 lorsque $x \to 0$.

Exemples :

$$x^2, \quad \sin x, \quad 1 - \cos x, \quad 1 - \frac{1}{1+x}$$

sont des infiniment petits avec x.

Infiniment grand.

On dit que $f(x)$ est un infiniment grand au voisinage de $x = 0$, si $f(x)$ tend vers $\pm \infty$ lorsque $x \to 0$.

Exemples.

$$\frac{1}{x}, \frac{\cos x - 1}{x^3}$$

tendent vers l'infini lorsque $x \to 0$.

Fonctions équivalentes.

$f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions équivalentes au voisinage de 0 si le rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 lorsque $x \to 0$.

On note $f \sim g$ ainsi :

$$\sin x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

Nous avons vu (chap. 1) quelques cas d'indéterminations. Les développements limités permettent de remplacer une fonction par un infiniment petit équivalent plus simple et de « lever l'indétermination ».

Exemples.

1. Quelle est la limite lorsque $x \to 0$ de

$$\frac{\sin px}{\sin qx}$$

Lorsque $x \to 0$, $\sin px \sim px$, $\sin qx \sim qx$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin px}{\sin qx} = \frac{p}{q}$$

2. Quelle est la limite lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$ de :

$$\frac{x \sin x - \frac{\pi}{2}}{\cos x}$$

Lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$, $\dfrac{x \sin x - \frac{\pi}{2}}{\cos x}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Posons $x = \frac{\pi}{2} + u$, $u \to 0$ lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$

$$\frac{x \sin x - \frac{\pi}{2}}{\cos x} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + u\right)\cos u - \frac{\pi}{2}}{-\sin u} \sim \frac{\left(\frac{\pi}{2} + u\right)\left(1 - \frac{u^2}{2}\right) - \frac{\pi}{2}}{-u} \sim \frac{u - \frac{\pi}{4}u^2}{-u}$$

dont la limite est -1.

---

3. Quelle est la limite lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$ de $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$.

Posons $x = \frac{\pi}{2} + u$; lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$, $u \to 0$

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x = u \,.\, \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + u\right) = \frac{-u}{\operatorname{tg} u}.$$

Lorsque $u \to 0$, $\operatorname{tg} u \sim u$ et la limite cherchée est -1.

8. APPLICATIONS A L'ÉTUDE DES COURBES $y = f(x)$

Étude au voisinage d'un point

Soit M_0 le point d'abscisse x_0 sur le graphe de $y = f(x)$.

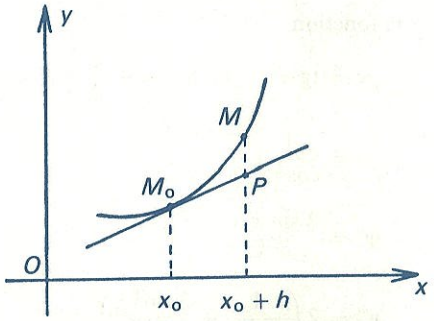


Figure 3.

Si pour $x = x_0$, $f'(x)$ et $f''(x)$ sont continues, $f(x)$ admet un développement limité à l'ordre 2 :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}[f''(x_0) + \varepsilon(h)]$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ avec h.

L'équation de la tangente en M_0 est :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Le point P d'abscisse $x_0 + h$ sur cette tangente a pour ordonnée

$$y_P = f(x_0) + hf'(x_0),$$

$\overline{PM}$ a pour valeur

$$f(x_0 + h) - y_P \sim \frac{h^2}{2!} f''(x_0) \qquad \text{si } f''(x_0) \neq 0$$

On en conclut que :

Si $f''(x_0) > 0$, $\overline{PM} > 0$ la courbe est située au-dessus de sa tangente et tourne sa concavité vers les y positifs.

Si $f''(x_0) < 0$, $\overline{PM} < 0$, la courbe est située au-dessous de sa tangente et tourne sa concavité vers les y négatifs.

Si $f''(x_0) = 0$ (et $f'''(x_0) \neq 0$) $\overline{PM}$ change de signe avec h et la courbe traverse sa tangente en M_0 qui est un point d'inflexion.

$$\left(\overline{PM} \sim \frac{h^3}{3!} f'''(x_0)\right)$$

Enfin si $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ *et* $f^{(4)}(x_0) \neq 0$

$$\overline{PM} \sim \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x_0)$$

ne change pas de signe avec h : M_0 est un point **méplat**.

Exemple.

Considérons la fonction

$$y = \operatorname{tg} x \qquad \text{pour} \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

$$y''' = 2\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3 \sin^2 x}{\cos^4 x}\right)$$

Pour $x > 0$, $y'' > 0$ la concavité est tournée vers les y positifs.
Pour $x < 0$, $y'' < 0$ la concavité est tournée vers les y négatifs.
Pour $x = 0$, $y''(0) = 0$ et $y'''(0) \neq 0$ la courbe traverse sa tangente en O qui est un point d'inflexion.

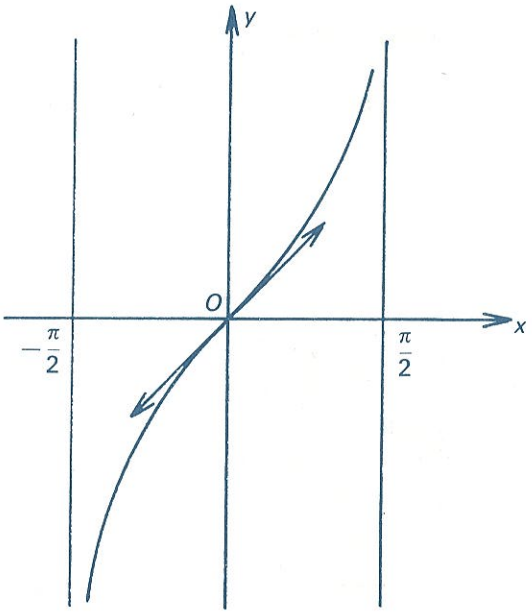


Figure 4.

Étude des branches infinies

Si $y \to \infty$ lorsque $x \to x_0$ la courbe admet la droite $x = x_0$ pour asymptote.

Si y tend vers une limite l finie lorsque $x \to \infty$, la courbe admet la droite $y = l$ pour asymptote.

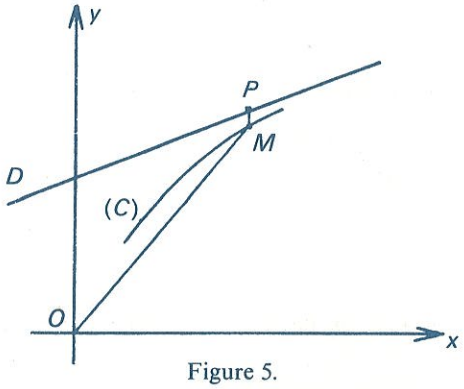


Figure 5.

Direction asymptotique (fig. 5).

La courbe C admet une direction asymptotique si la droite OM tend vers une position limite lorsque le point M s'éloigne à l'infini sur C.

Le coefficient angulaire de OM est $\frac{f(x)}{x}$.

S'il existe une direction asymptotique $\frac{f(x)}{x}$ tend vers une limite ([1]).

Asymptote

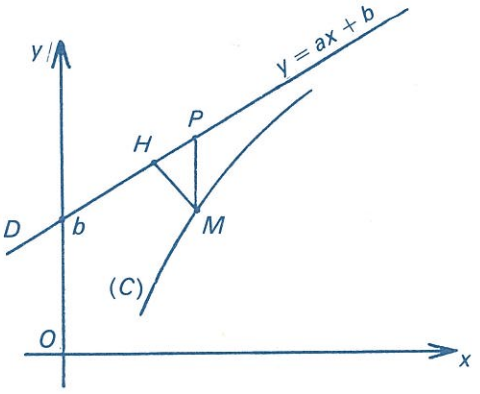


Figure 6.

C admet une asymptote oblique D d'équation $y = ax + b$, si la distance $\overline{MH}$ de M à D tend vers 0 lorsque M s'éloigne à l'infini sur C, il en est de *même de* $\overline{MP}$ et la pente de D est

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Pour déterminer l'ordonnée à l'origine de D il suffit d'exprimer que

$$f(x) - ax - b$$

tend vers 0 lorsque $x \to \infty$.

([1]) Si $\frac{f(x)}{x} \to +\infty$ on dit que (C) admet une branche parabolique dans la direction de Oy.

Exemple.

$$f(x) = \frac{3x^2 + x}{x + 1}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{3x^2 + x}{x^2 + x}$$

admet pour limite 3 lorsque $x \to \infty$.

$$f(x) - 3x - b = \frac{3x^2 + x}{x + 1} - 3x - b$$

$$= \frac{-2x}{x + 1} - b$$

$\frac{-2x}{x+1}$ tend vers -2 lorsque x tend vers l'infini donc $b = -2$.

Il est pratique de déterminer le développement limité $\frac{f(x)}{x}$ pour obtenir l'équation de l'asymptote oblique.

Ce développement aura de plus l'avantage de nous renseigner sur la position de la courbe par rapport à son asymptote oblique éventuelle.

Dans un tel cas

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

donnera si $c \neq 0$, $\overline{PM} = f(x) - ax - b$ (fig. 6) $\overline{MP} \sim \frac{c}{x}$.

Si $c > 0$, la courbe est au-dessus de son asymptote pour $x \to +\infty$, et au-dessous pour $x \to -\infty$. Si $c < 0$ les résultats sont inverses.

Si $c = 0$, on pousse le développement jusqu'au premier terme non nul en $\frac{1}{x}$.

9. MARCHE A SUIVRE POUR L'ÉTUDE D'UNE FONCTION $x \to f(x)$ ET CONSTRUCTION DE SON GRAPHE

1° Chercher les valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie.

2° Chercher les symétries éventuelles (fonction paire ou impaire ainsi que symétrie du graphe par rapport à la droite $y = x$). De telles symétries permettent de réduire de moitié l'intervalle d'étude de $f(x)$.

3° Déterminer le sens des variations de $f(x)$.

Pour cela le calcul de la dérivée est généralement le moyen utilisé :

si $f'(x) > 0$ pour $x \in [a, b] \Rightarrow f(x)$ est croissante sur $[a, b]$,

si $f'(x) = 0$ pour $x \in [a, b] \Rightarrow f(x)$ est constante sur $[a, b]$,
si $f'(x) < 0$ pour $x \in [a, b] \Rightarrow f(x)$ est décroissante sur $[a, b]$.

Il y a un extrémum de $f(x)$ si $f'(x)$ change de signe en s'annulant.

4° Tableau de variation.

Dresser un tableau résumant les différents résultats obtenus :

- on définit les intervalles où $f'(x)$ garde un signe constant,
- on indique le sens de variation de $f(x)$ par des flèches,
- on calcule les valeurs des maximums et des minimums (valeurs de $f(x)$ pour les valeurs de x qui annulent $f'(x)$).

On complète le tableau :

- en cherchant les limites de $f(x)$ aux bornes des intervalles et lorsque

$$x \to \pm \infty$$

5° Construire les asymptotes parallèles aux axes ou obliques et les tangentes aux points remarquables. Préciser la position du graphe par rapport aux asymptotes.

6° Tracer le graphe en mettant à profit les éléments de symétrie ou la périodicité s'il y a lieu.

Résumé du chapitre 7

THÈORÉME DES ACCROISSEMENTS FINIS APPLICATIONS

- **Théorème de Rolle.**

Si $f(x)$ définie et continue sur $[a, b]$, admet une dérivée $f'(x)$ sur $]a, b[$ et vérifie $f(a) = f(b) = 0$ il existe au moins une valeur $c \in [a, b]$, pour laquelle $f'(c) = 0$.

- **Théorème des accroissements finis.**

Si $f(x)$ définie et continue sur $[a, b]$ admet une dérivée $f'(x)$ sur $]a, b[$ il existe au moins une valeur $c \in [a, b]$ pour laquelle :

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

- **Théorème des accroissements finis généralisé.**

Si $f(x)$ et $g(x)$ vérifient simultanément les conditions précédentes et si $g'(x)$ ne s'annule pas sur $]a, b[$, il existe une valeur $c \in]a, b[$ pour laquelle

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

- **Règle de L'Hospital.**

Si $f(a) = g(a) = 0$ et si

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

- **Formule de Taylor.**

Si $f(x)$ et ses n premières dérivées sont définies et continues $\forall\, x \in [a, b]$, et si $f^{(n+1)}(x)$ est définie pour $x \in]a, b[$, alors :

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(b - a)^3 f'''(a)}{3!} + \ldots$$

$$+ \frac{(b - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c) \qquad (a < c < b)$$

- **Formule de Mac Laurin.**

Les hypothèses étant les mêmes que ci-dessus et si $0 \in [a, b]$ on a :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$$

$$+ \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \qquad \text{avec} \qquad 0 < \theta < 1$$

Cette formule est utilisée pour établir le développement limité des fonctions usuelles :

- **Développements limités usuels.**

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + 0(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p + 1)!} + 0(x^{2p+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)\,x^p}{p!} + o(x^p)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

- **Développements limités qu'on calcule aisément à partir des précédents.**

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6)$$

$$\operatorname{Arc\,sin} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1.3.\cdots.(2n-1)}{2.4.\ldots.2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{Arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{Arg\,sh} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{1.3.\cdots.(2n-1)}{2.4.\ldots.2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{Arg\,th} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

- **Équivalence d'infiniments petits lorsque $x \to 0$.**

$\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{Arc}\sin x$, $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{Arg}\operatorname{sh} x$, $\operatorname{Arg}\operatorname{th} x$, $\operatorname{Log}(1+x)$	$\sim x$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

$$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$$

$$e^x - 1 \sim x$$

- **Opérations sur les développements limités.**

Si $f(x) = A(x) + o(x^n)$

$g(x) = B(x) + o(x^n)$

La partie régulière de $f(x) + g(x)$ est $A(x) + B(x)$.

La partie régulière de $f(x).g(x)$ est le polynôme de degré n extrait du produit $A(x)\,B(x)$.

La partie régulière de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est le quotient à l'ordre n de la division de $A(x)$ par $B(x)$, effectuée suivant les puissances croissantes.

Le développement limité de $f'(x)$ supposée indéfiniment dérivable, à l'ordre $n-1$, s'obtient en dérivant celui de $f(x)$ à l'ordre n.

Le développement limité de la primitive F de $f(x)$ s'obtient en intégrant celui de $f(x)$ terme à terme, la constante d'intégration étant $F(0)$.

EXERCICES

■ **1.** Quelles sont les coordonnées du minimum et du maximum relatifs de la fonction

$$y = 2x^3 - 24x + 5 \ ?$$

Réponse : min $(2, -27)$; max $(-2, +37)$.

Quelles sont les coordonnées du maximum et du minimum de la fonction

$$y = \frac{x^2 - 12x + 27}{x^2 - 4x + 5} \ ?$$

Réponse : max $\left(\dfrac{3}{2}, 9\right)$; min $(4, -1)$.

■ **2.** Quelles sont les asymptotes de la courbe représentative de $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$?

Réponse : $x = 1$ et $y = x - 2$.

■ **3.** Quel est le développement limité à l'ordre 3 de $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ au voisinage de $x = 0$.

$$y = e^{\frac{1}{x}\text{Log}(1+x)}.$$

Au voisinage de l'origine

$$z = \frac{1}{x}\text{Log}(1 + x) = \frac{1}{x}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right]$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$

$$= 1 + u$$

$$e^z = e \cdot e^u$$

$$e^u = 1 + \left[-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]$$

$$+ \frac{1}{6}\left[-\frac{x^3}{8} + o(x^3)\right]$$

$$e^u = 1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{ex}{2} + \frac{11}{24}ex^2 - \frac{7e}{16}x^3 + o(x^3)$$

■ **4.** Quel est le développement limité à l'ordre 5 de $\text{ch } 2x \cdot \text{sh } 3x$ pour $x = 0$.

$$\text{ch } 2x = 1 + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^5)$$

$$\text{sh } 3x = 3x + \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\text{ch } 2x \text{ sh } 3x = \left[1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + 0(x^5)\right] \cdot \left[3x + \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{40}x^5 + o(x^5)\right]$$

$$= 3x + \frac{21}{2}x^3 + \frac{521}{40}x^5 + o(x^5).$$

■ **5.** Quel est le développement limité à l'ordre 7 de :

$$y = (\cos x - 1)(\text{sh } x - x) - (\text{ch } x - 1)(\sin x - x)$$

au voisinage de $x = 0$?

A l'ordre 7 nous avons :

$$\operatorname{sh} x - x = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$$

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$$

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$$

$$\operatorname{ch} x - 1 = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^7).$$

En effectuant les calculs, tous les termes de degré inférieurs à 7 se réduisent. Seul reste le terme en x^7 : $\frac{x^7}{180}$.

Au voisinage de 0,

$$y = \frac{x^7}{180} + o(x^7)$$

■ **6.** Quel est le développement limité à l'ordre n de $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1}$ au voisinage de $x = 0$.

Nous savons que, au voisinage de $x = 0$:

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n).$$

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = \left(\frac{1}{1 - x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n + 1)x^n, + o(x^n)$$

On en déduit le développement de y par multiplication par $1 + x^2$

$$y = (1 + x^2)[1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n + 1)x^n + o(x^n)]$$
$$= 1 + 2x + 4x^2 + 6x^3 + \ldots + 2nx^n + o(x^n).$$

■ **7.** Développement limité à l'ordre 4 pour x tendant vers 1 de

$$y = \frac{\operatorname{Log} x}{x^2}.$$

Posons $x - 1 = t$; t tend vers 0 lorsque $x \to 1$

$$y = \frac{\operatorname{Log}(1 + t)}{(1 + t)^2}$$

On peut donc développer $\operatorname{Log}(1 + t)$:

$$\operatorname{Log}(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4).$$

Pour obtenir le développement limité de y, nous divisons suivant les puissances croissantes de t, le numérateur par le dénominateur (jusqu'à l'ordre 4).

$$\begin{array}{r|l}
t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} & 1 + 2t + t^2 \\
\hline
-t - 2t^2 - t^3 & \\
\hline
-\frac{5}{2}t^2 - \frac{2t^3}{3} - \frac{t^4}{4} & t - \frac{5}{2}t^2 + \frac{13}{3}t^3 - \frac{77}{12}t^4 \\
+\frac{5}{2}t^2 + 5t^3 + \frac{5}{2}t^4 & \\
\hline
\frac{13}{3}t^3 + \frac{9}{4}t^4 & \\
-\frac{13}{3}t^3 - \frac{26}{3}t^4 & \\
\hline
-\frac{77}{12}t^4 &
\end{array}$$

et donc :

$$\frac{\operatorname{Log} x}{x^2} = (x - 1) - \frac{5}{2}(x - 1)^2 + \frac{13}{3}(x - 1)^3 - \frac{77}{12}(x - 1)^4 + 0\,[(x - 1)^4].$$

■ **8.** Limite de $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ lorsque $x \to +\infty$.

Lorsque x tend vers l'infini y se présente sous la forme indéterminée $\infty - \infty$.

On peut écrire

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}}$$

Divisons par $\sqrt{x}$:

$$y = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}} + 1}$$

Lorsque $x \to \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \to 0$$

la limite de y est donc $\frac{1}{2}$.

■ **9.** Limite pour $x = 1$ de $y = \dfrac{x-1}{x^m-1}$ $\quad m \in \mathbb{R}.\ (m \neq 0)$

Pour $x = 1$, y se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Posons $x = 1 + t$:

$$y = \frac{t}{(1+t)^m - 1} = \frac{t}{1 + mt + 0(t) - 1}$$

La limite de y est $\frac{1}{m}$.

■ **10.** Limite de $y = (\pi - 2x)\operatorname{tg} x$ lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$.

Lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$, $\pi - 2x \to 0$, $\operatorname{tg} x \to \infty$ et y se présente sous la forme indéterminée $0 \times \infty$.

Posons :

$$x = \frac{\pi}{2} + u; \qquad u \to 0 \text{ lorsque } x \to \frac{\pi}{2}$$

alors :

$$y = \left[\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} + u\right) \times \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + u\right)\right]$$
$$= (-2u).(-\operatorname{cotg} u)$$
$$= \frac{2u}{\operatorname{tg} u}$$

Lorsque $u \to 0$ $\operatorname{tg} u \sim u$ et $y \sim \dfrac{2u}{u} = 2$.

Par conséquent

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x).\operatorname{tg} x = 2.$$

■ **11.** Limite de $y = \dfrac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}$ lorsque $x \to a$.

Lorsque $x \to a$, y présente une indétermination du type $\dfrac{0}{0}$. Nous pouvons écrire y sous la forme

$$y = \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \cdot \frac{\sin x + \sin a}{x + a}$$

$$= 2 \cdot \frac{\sin \dfrac{x - a}{2} \cos \dfrac{x + a}{2}}{2 \dfrac{x - a}{2}} \cdot \frac{\sin x + \sin a}{x + a}$$

Lorsque $x \to a$, $x - a \to 0$ $\quad \sin \dfrac{x - a}{2} \sim \dfrac{x - a}{2}$

$$\cos \frac{x + a}{2} \to \cos a \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin x + \sin a}{x + a} \to \frac{\sin a}{a}$$

Par conséquent :

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2} = \frac{\sin a \cos a}{a}$$

■ **12.** Quelle est la limite lorsque x tend vers 0 de

$$\frac{a^x - b^x}{x}$$

---

a^x peut s'écrire $e^{x \operatorname{Log} a}$

$$e^{x \operatorname{Log} a} \sim 1 + x \operatorname{Log} a$$

$$\frac{a^x - b^x}{x} \sim \frac{1 + x \operatorname{Log} a - 1 - x \operatorname{Log} b}{x} = \operatorname{Log} a - \operatorname{Log} b$$

et la limite cherchée est $\operatorname{Log} \dfrac{a}{b}$.

■ **13.** Calculer les dérivées de

$$y_1 = e^{\sin \sqrt{x}}$$

$$y_2 = e^{x^3 - x + \cos x}$$

Posons

$$u = \sin \sqrt{x} \qquad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos \sqrt{x}$$

$$y'_1 = u' e^u = \frac{\cos \sqrt{x}\, e^{\sin \sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

De même $y'_2 = (x^3 - x + \cos x)'\, e^{x^3 - x + \cos x}$

$= (3x^2 - 1 - \sin x)\, e^{x^3 - x + \cos x}$

14. Quelle est la limite lorsque x tend vers 0 de :

$$y(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x(1 - \cos x)}{x^3 \operatorname{Log}(1 + x)}.$$

Au voisinage de 0, $\operatorname{tg}^2 x \sim x^2$ et $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$.

Le développement limité de $\operatorname{Log}(1 + x)$ au voisinage de $x = 0$ est

$$\operatorname{Log}(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

et $\operatorname{Log}(1 + x) \sim x$; y est équivalent à $\dfrac{x^2 \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3 \cdot x} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 0} y(x) = \frac{1}{2}$$

15. Quelle est la limite de

$$y = \frac{\sin x \operatorname{Log}(1 + x^2)}{x \operatorname{tg} x} \text{ lorsque } x \to 0 \text{ ?}$$

Lorsque x tend vers 0, x^2 tend également vers 0, et

$$\operatorname{Log}(1 + x^2) \sim x^2.$$

D'autre part $\sin x \sim x$ et $\operatorname{tg} x \sim x$.

Donc $y \sim \dfrac{x \cdot x^2}{x \cdot x}$ soit $y \sim x$.

Donc y tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

16. Quelle est la limite de

$$y = \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

lorsque x tend vers l'infini ?

Lorsque x tend vers l'infini, $\frac{1}{x}$ tend vers 0

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + 0\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\cos\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + 0\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{2x^2} + 0\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

D'où

$$y \sim \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x^2}} \quad \text{soit} \quad y \sim 2x$$

et tend vers l'infini.

17. Limite pour $x \to +\infty$ de

$$y = \frac{\sqrt{x}\, e^x + x^9 - 1983 \operatorname{Log} x}{x^3 + (\sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3}) \operatorname{ch} x}$$

Le numérateur de y est équivalent à $\sqrt{x}\, e^x$ qui est infiniment grand par rapport aux deux autres termes. Pour déterminer un équivalent du dénominateur, cherchons d'abord la limite et la partie principale de $\sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3}$

$$\sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3} = \sqrt{x^3}\left[\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1\right] \sim \sqrt{x^3} \cdot \frac{1}{2x}$$

car $\sqrt{1 + u} = 1 + \frac{1}{2}u + 0(u)$ et donc $\sqrt{1 + u} - 1 \sim \frac{1}{2}u$.

Donc

$$\sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3} \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

Par ailleurs ch $x \sim \frac{1}{2} e^x$ (quand $x \to +\infty$) et le dénominateur est équivalent à $\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2} e^x\right) = \frac{e^x\sqrt{x}}{4}$ qui est infiniment grand par rapport à x^3. Donc

$$y \sim \frac{\sqrt{x}\, e^x}{\frac{e^x\sqrt{x}}{4}}, \quad y \to 4$$

■ **18.** Calculer la limite de $y = \dfrac{\text{Log cos } ax}{\text{Log cos } bx}$ lorsque $x \to 0$.

Lorsque $x \to 0$, cos ax et cos bx tendent vers 1 et y se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Au voisinage de $u = 0$

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + 0(u^2) = 1 + v$$

$$\text{Log cos } u = \text{Log } (1 + v) \sim v \sim -\frac{u^2}{2!}.$$

On en conclut que $\quad \text{Log cos } ax \sim -\dfrac{(ax)^2}{2!}$

et que $\quad \text{Log cos } bx \sim -\dfrac{(bx)^2}{2!}$

et $\quad y \sim \dfrac{-\frac{(ax)^2}{2!}}{-\frac{(bx)^2}{2!}} = \dfrac{a^2}{b^2}$

Finalement $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{Log cos } ax}{\text{Log cos } bx} = \dfrac{a^2}{b^2}$

■ **19.** Limite de $y = (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ lorsque x tend vers 0.

Lorsque x tend vers 0, y se présente sous la forme indéterminée 1^∞.

$$\text{Log } y = \frac{1}{\sin^2 x} \text{Log cos } x$$

Lorsque $x \to 0$, cos $x \to 1$ et $\text{Log cos } x \sim \cos x - 1$

$$\text{Log } y \sim \frac{1}{x^2} \cdot (\cos x - 1)$$

ou $$\operatorname{Log} y \sim \frac{1}{x^2} \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

et $$\lim_{x \to 0} \operatorname{Log} y = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to 0} y = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

■ **20.** Limite pour $x = 0$ de

$$y = (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

Partons du logarithme de y :

$$\operatorname{Log} y = \frac{1}{x} \operatorname{Log} (\sin x + \cos x)$$

Au voisinage de 0, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^3)$;

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + 0(x^4)$$

$$\sin x + \cos x = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + 0(x^3) = 1 + v,$$

où v désigne la quantité $x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + 0(x^3)$ qui tend vers 0 avec x.

$$\operatorname{Log} (\sin x + \cos x) = \operatorname{Log} (1 + v) = v - \frac{v^2}{2!} + 0(v^2) \sim v \sim x.$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{Log} y = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} y = e$$

■ **21.** Limite pour $x = 0$ de $y = (1 + a \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}}$

Pour $x = 0$, y se présente sous la forme 1^∞

$$\operatorname{Log} y = \frac{1}{x \sin x} \operatorname{Log} (1 + a \operatorname{tg}^2 x)$$

Au voisinage de 0 $\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$ et $\operatorname{Log} (1 + a \operatorname{tg}^2 x) \sim ax^2$, d'où

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{Log} y = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} y = e^a$$

■ **22.** Limite quand $x \to + \infty$ de

$$y = \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x \quad (a, b, c \text{ sont positifs}).$$

Lorsque $x \to +\infty$, y se présente sous la forme indéterminée 1^{∞}. Prenons les logarithmes :

$$\operatorname{Log} y = x \operatorname{Log}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)$$

Or $a^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\operatorname{Log} a}$ et l'on peut prendre un développement limité (à l'ordre 1) de cette quantité, puisque $\frac{1}{x}$ tend vers zéro

$$a^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\operatorname{Log} a} = 1 + \frac{1}{x}\operatorname{Log} a + 0\left(\frac{1}{x}\right)$$

on fait de même pour les deux autres termes et

$$\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3} = \frac{3 + \frac{1}{x}(\operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b + \operatorname{Log} c) + 0\left(\frac{1}{x}\right)}{3} =$$

$$= 1 + \frac{1}{3x}\operatorname{Log} abc + 0\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc

$$\operatorname{Log} y = x \operatorname{Log}\left[1 + \frac{1}{3x}\operatorname{Log} abc + 0\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\sim x \times \frac{1}{3x}\operatorname{Log} abc = \frac{1}{3}\operatorname{Log} abc = \operatorname{Log}\sqrt[3]{abc}$$

et

$$y \to \sqrt[3]{abc}.$$

■ **23.** Limite de $y = (\operatorname{th} x)^{\operatorname{Log} x}$ lorsque $x \to \infty$.

Lorsque x tend vers l'infini, $\operatorname{th} x \to 1$ et $\operatorname{Log} x \to \infty$, on est en présence d'une indétermination du type 1^{∞}.

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1 - \frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$\operatorname{Log} y = \operatorname{Log} x \,.\, \operatorname{Log} \operatorname{th} x$$

$$= \operatorname{Log} x \operatorname{Log}\left(1 - \frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}\right) \sim \operatorname{Log} x \,.\left(\frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}\right)$$

$$\sim -\frac{2 \operatorname{Log} x}{e^{2x}}$$

Lorsque $x \to \infty$, cette quantité tend vers 0 : la limite de y est donc 1.

■ **24.** Limite pour $x \to +\infty$ de

$$y = \left[\frac{\operatorname{Log}(x+1)}{\operatorname{Log} x}\right]^{x \operatorname{Log} x}$$

Lorsque x tend vers l'infini y se présente sous la forme indéterminée $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$.

$$\operatorname{Log} y = x \operatorname{Log} x \operatorname{Log}\left[\frac{\operatorname{Log}(x+1)}{\operatorname{Log} x}\right]$$

Le crochet tend manifestement vers 1. Mettons cela en évidence :

$$\frac{\operatorname{Log}(x+1)}{\operatorname{Log} x} = \frac{\operatorname{Log}\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{\operatorname{Log} x} = \frac{\operatorname{Log} x + \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{Log} x}$$

$$= 1 + \frac{\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{Log} x},$$

quantité qui tend effectivement vers 1, et donc

$$\operatorname{Log} y = x \operatorname{Log} x \,.\, \operatorname{Log}\left[1 + \frac{\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{Log} x}\right] \sim x \operatorname{Log} x \,.\, \frac{\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{Log} x}$$

et

$$\operatorname{Log} y \sim x \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim x \times \frac{1}{x} = 1$$

et

$$y \to e$$

■ **25.** Trouver la limite lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$ de :

$$\frac{|\operatorname{tg} x|^{\cos x}}{}$$

Posons :

$$x = \frac{\pi}{2} - u$$

On a :

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} u}; \quad \cos x = \sin u$$

Donc

$$|\operatorname{tg} x|^{\cos x} = e^{\cos x \operatorname{Log} |\operatorname{tg} x|}$$

$$= e^{\sin u \operatorname{Log} \left|\frac{1}{\operatorname{tg} u}\right|}$$

Nous chercherons donc la limite de l'expression

$$\sin u \,.\, \operatorname{Log}\left|\frac{1}{\operatorname{tg} u}\right|$$

lorsque $u \to 0$.

Or on peut écrire :

$$\sin u \,.\, \mathrm{Log}\left|\frac{1}{\mathrm{tg}\, u}\right| = \sin u \,\mathrm{Log}\cos u - \sin u \,\mathrm{Log}\,|\sin u|.$$

Et les deux termes obtenus tendent vers 0 lorsque $u \to 0$.

Donc

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} |\mathrm{tg}\, x|^{\cos x} = 1$$

■ **26.** Trouver la limite lorsque $x \to \dfrac{\pi}{4}$ de :

$$\frac{(\mathrm{tg}\, x)^{\mathrm{tg}\, 2x}}{}$$

Faisons le changement de variable :

$$x = \frac{\pi}{4} - u.$$

On aura :

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{1 - \mathrm{tg}\, u}{1 + \mathrm{tg}\, u}; \quad \mathrm{tg}\, 2x = \mathrm{cotg}\, 2u$$

On peut écrire d'autre part :

$$(\mathrm{tg}\, x)^{\mathrm{tg}\, 2x} = e^{\mathrm{tg}\, 2x \,\mathrm{Log}\, \mathrm{tg}\, x}$$

Et nous aurons donc à chercher la limite de l'expression

$$\mathrm{cotg}\, 2u \,.\, \mathrm{Log}\left(\frac{1 - \mathrm{tg}\, u}{1 + \mathrm{tg}\, u}\right)$$

lorsque $u \to 0$.

Or

$$\lim_{u \to 0} \frac{1 - \mathrm{tg}\, u}{1 + \mathrm{tg}\, u} = 1$$

On en déduit que, au voisinage de $u = 0$,

$$\mathrm{Log}\left(\frac{1 - \mathrm{tg}\, u}{1 + \mathrm{tg}\, u}\right) \sim \frac{1 - \mathrm{tg}\, u}{1 + \mathrm{tg}\, u} - 1 = -\frac{2\,\mathrm{tg}\, u}{1 + \mathrm{tg}\, u}$$

et

$$\mathrm{cotg}\, 2u \,.\, \mathrm{Log}\left(\frac{1 - \mathrm{tg}\, u}{1 + \mathrm{tg}\, u}\right) \sim -\frac{2\,\mathrm{tg}\, u}{\mathrm{tg}\, 2u} \cdot \frac{1}{1 + \mathrm{tg}\, u}$$

qui tend vers -1 lorsque $u \to 0$.

On en déduit aisément

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}\, x)^{\mathrm{tg}\, 2x} = \frac{1}{e}$$

■ **27.** Trouver la limite lorsque $x \to 0$ de l'expression

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$$

Nous pouvons écrire :

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\operatorname{Log}\left(\frac{x}{\sin x}\right)}$$

et le problème revient à chercher la limite de l'exposant de e, soit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x-\sin x} \operatorname{Log}\left(\frac{x}{\sin x}\right)$$

Or

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

Donc lorsque $x \to 0$

$$\operatorname{Log}\left(\frac{x}{\sin x}\right) \sim \frac{x}{\sin x} - 1$$

et, par suite :

$$\frac{\sin x}{x-\sin x} \cdot \operatorname{Log}\frac{x}{\sin x} \sim \frac{\sin x}{x-\sin x} \cdot \frac{x-\sin x}{\sin x} = 1$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = e$$

■ **28.** Limite de $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ lorsque $x \to 0$.

Cette expression est de la forme 0^0, nous avons :

$$\operatorname{Log} y = \operatorname{tg} x \operatorname{Log} \sin x.$$

Or lorsque $x \to 0$, $\operatorname{tg} x \sim x$ et $\sin x \sim x$, $\operatorname{Log} y \sim x \operatorname{Log} x \to 0$, par conséquent y tend vers 1.

■ **29.** Limite de l'expression

$$y = \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x} \qquad \text{pour} \qquad x = 0.$$

Cette expression est de la forme $\frac{0}{0}$.

Utilisons la règle de L'Hospital :

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}}{2 \sin x \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[-\frac{1}{2\cos x} + \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}} \right]$$

$$= \frac{1}{2}.$$

■ **30.** Limite de $y = \dfrac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ lorsque $x \to 0$.

Si $x \to 0$ par valeurs positives, $\frac{1}{x} \to +\infty$ et $e^{\frac{1}{x}} + 1 \to +\infty$ et puisque

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant 1 \quad \lim_{x\to +0} y = 0$$

Si $x \to 0$ par valeurs négatives, $\frac{1}{x} \to -\infty$, $e^{\frac{1}{x}} \to 0$ et puisque $\sin \frac{1}{x}$ oscille entre -1 et $+1$, y n'a pas de limite.

■ **31.** Limite de $y = (\sin x)^{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}}$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

---

y se présente sous la forme indéterminée 1^{∞}.

Posons $x = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$: lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon \to 0$.

$$\sin x = \cos \varepsilon \qquad \text{et} \qquad y = (\cos \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$\operatorname{Log} y = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Log} \cos \varepsilon \sim \frac{1}{\varepsilon} (\cos \varepsilon - 1) \sim -\frac{\varepsilon}{2}$$

Log y tend vers 0 avec ε et la limite cherchée est 1.

■ **32.** Calculer la limite de $y = \dfrac{e^{\operatorname{Arc}\sin x} - e^{\sin x}}{e^{\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x} - e^{\operatorname{tg} x}}$ quand $x \to 0$.

Utilisons des développements limités à l'ordre 3 de e^u, Arc sin u, sin u, tg u et Arc tg u.

$$\text{Arc sin } x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o(u^3)$$

et donc :

$$e^{\text{Arc sin } x} = e^{x+\frac{x^3}{6}+0(x^3)} = 1 + \left(x + \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2!}\left(x + \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x + \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3)$$

et

$$e^{\text{Arc sin } x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

De la même manière :

$$e^{\sin x} = e^{x-\frac{x^3}{6}+0(x^3)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$e^{\text{Arc tg } x} = e^{x-\frac{x^3}{3}+0(x^3)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$e^{\text{tg } x} = e^{x+\frac{x^3}{3}+0(x^3)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

et donc

$$y = \frac{\frac{x^3}{3} + 0(x^3)}{-\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + 0(x^3)} \sim \frac{\frac{x^3}{3}}{-\frac{2}{3}x^3} \to -\frac{1}{2}$$

■ **33.** Limite pour x infini de

$$y = x\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e\right]$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \text{ Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

si $x \to \infty$

$$\text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$e^{x \text{ Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{1-\frac{1}{2x}+0\left(\frac{1}{x}\right)} = e \cdot e^{-\frac{1}{2x}+0\left(\frac{1}{x}\right)} = e\left[1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

et

$$y = x\left[e - \frac{e}{2x} - e + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] \sim -\frac{e}{2}$$

$$y \to -\frac{e}{2}$$

■ **34.** Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\operatorname{sh} x)^n - x^n}{(\sin x)^n - x^n}$$

Au voisinage de 0,

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^2)$$

$$\operatorname{sh}^n x = x^n\left(1 + \frac{nx^2}{6} + o(x^2)\right)$$

$$\sin^n x = x^n\left(1 - \frac{nx^2}{6} + o(x^2)\right).$$

L'expression ci-dessus est donc équivalente à :

$$\frac{x^n \dfrac{nx^2}{6}}{-x^n \dfrac{nx^2}{6}}$$

et tend vers -1.

■ **35.** Limite pour x infini de

$$y = \left(\frac{2x + 1}{2x - 1}\right)^{2x}$$

On peut écrire

$$y = \left(1 + \frac{2}{2x - 1}\right)^{2x}$$

soit

$$\operatorname{Log} y = 2x \operatorname{Log}\left(1 + \frac{2}{2x - 1}\right)$$

Lorsque x tend vers l'infini,

$$\operatorname{Log}\left(1 + \frac{2}{2x - 1}\right) \sim \frac{2}{2x - 1}$$

et

$$\operatorname{Log} y \sim \frac{2 \cdot 2x}{2x - 1} \text{ tend vers } 2$$

soit

$$y \to e^2$$

■ **36.** Limite de $y = (\cos x)^{\operatorname{Log}|x|}$ lorsque $x \to 0$.

On peut écrire :

$$y = e^{\operatorname{Log}|x| \cdot \operatorname{Log}\cos x}$$

$$\operatorname{Log} y \sim \operatorname{Log}|x| \cdot (\cos x - 1)$$

or

$$u = \operatorname{Log}|x|(\cos x - 1) \sim -\frac{x^2}{2}\operatorname{Log}|x|$$

$-\frac{x^2}{2}\operatorname{Log}|x|$ tend vers 0 avec x et y tend vers 1.

■ **37.** Étudier et construire le graphe de la fonction

$$y = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4}$$

Cette fonction est définie et continue pour les valeurs qui n'annulent pas le dénominateur, c'est-à-dire dans les intervalles

$$]-\infty, -2[; \quad]-2, +2[; \quad]+2, +\infty[.$$

Pour étudier la croissance, calculons y' avec :

$$\left.\begin{aligned} u &= x^2 + 3x \\ v &= x^2 - 4 \end{aligned}\right\} \quad y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} = -\frac{3x^2 + 8x + 12}{(x^2 - 4)^2}$$

Le trinôme du second degré $3x^2 + 8x + 12$ est de signe constant et positif puisque $\Delta' = 4^2 - 12 \cdot 3 = -20$, donc $y' < 0, \forall x$.

lorsque $x \to \pm\infty$ $\qquad y \sim \frac{x^2}{x^2} = 1$

lorsque $x \to \pm 2$ $\qquad y \to \infty$

On en conclut le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	
y	1	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	1

et le graphe :

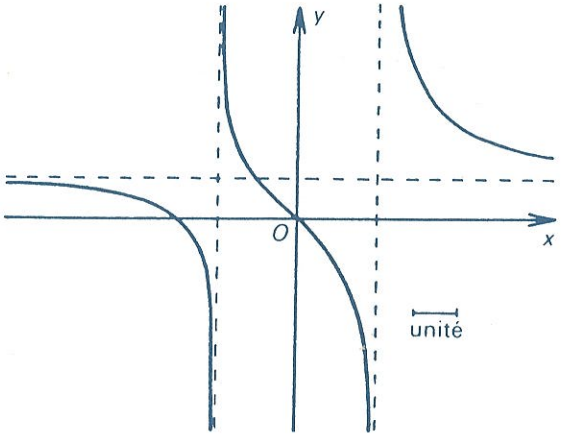


Figure 7.

■ **38.** Étudier et construire le graphe de

$$y = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^3}$$

---

y est définie pour $x \neq 0$. Le changement de x en $-x$ change y en $-y$: la fonction est impaire et 0 est un centre de symétrie.

Nous étudierons donc cette fonction dans l'intervalle $]0, +\infty[$

$$y' = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 3)}{x^4}$$

s'annule pour $x = \pm 1$.

Lorsque $x \to 0$, $y \sim \frac{1}{x^3}$ tend vers l'infini.

En développant le numérateur, y s'écrit :

$$y = x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} \qquad (1)$$

Lorsque $x \to + \infty$ $y \to \infty$ et la droite $y = x$ est asymptote.
Les points d'inflexion sont déterminés par $y'' = 0$.
L'expression (1) donne :

$$y' = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}$$

$$y'' = -\frac{4}{x^3} + \frac{12}{x^5} = \frac{12 - 4x^2}{x^5} = \frac{4(3 - x^2)}{x^5}$$

$$y'' = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm\sqrt{3}, \quad y = \pm\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

La courbe coupe l'asymptote pour $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

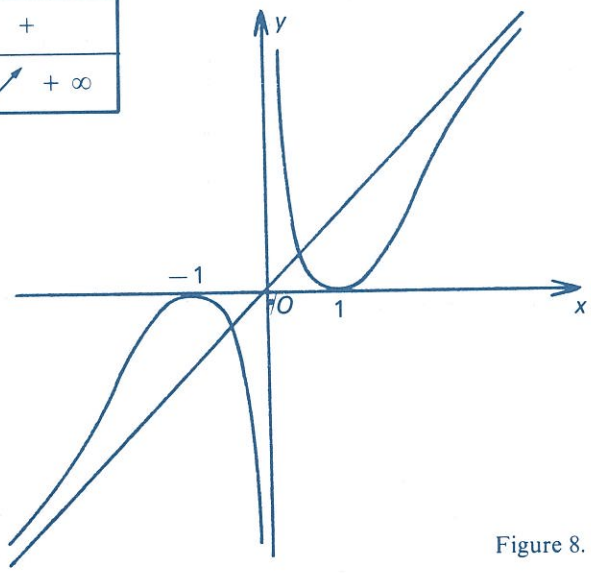


Figure 8.

■ **39.** Étudier les variations de la fonction

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x - 2}}$$

Cette fonction est définie pour $\frac{x^3}{x - 2} > 0$ soit pour $x(x - 2) > 0$. L'intervalle de variation est donc $]-\infty, 0] \cup]2 + \infty[$.

La dérivée de $\sqrt{u}$ étant $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$, nous aurons :

$$y' = \frac{(x-2)\,3x^2 - x^3}{2(x-2)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}} = \frac{x^2(x-3)}{(x-2)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}$$

$y' > 0$ pour $x > 3$ et $y' < 0$ pour $x < 3$.

$y' = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = 3$ $\left(\text{car } \lim_{x \to 0_-} \frac{x^2}{(-x)^{3/2}} = 0\right)$

Asymptotes.

Cherchons le développement limité au 2ᵉordre de $\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} = \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x}{x-2}} = \frac{|x|}{x}\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{|x|}{x}\left[1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

Lorsque $x \to +\infty$, $y - (x+1) \sim \frac{3}{2x}$.

La courbe admet la droite $y = x + 1$ pour asymptote et $\frac{3}{2x} > 0$: la courbe est au-dessus de l'asymptote.

Lorsque $x \to -\infty$ $\quad y \sim -x - 1 - \frac{3}{2x}$.

La courbe admet la droite $y = x + 1$ pour asymptote et $\frac{3}{2x} > 0$: la courbe la courbe est au-dessus de son asymptote.

Enfin lorsque $x \to 2$ (par valeurs positives) $y \to +\infty$.

Tableau de variation.

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'	$-$				$-$	0	$+$		
y	$+\infty$	↘	0		$+\infty$	↘	$3\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

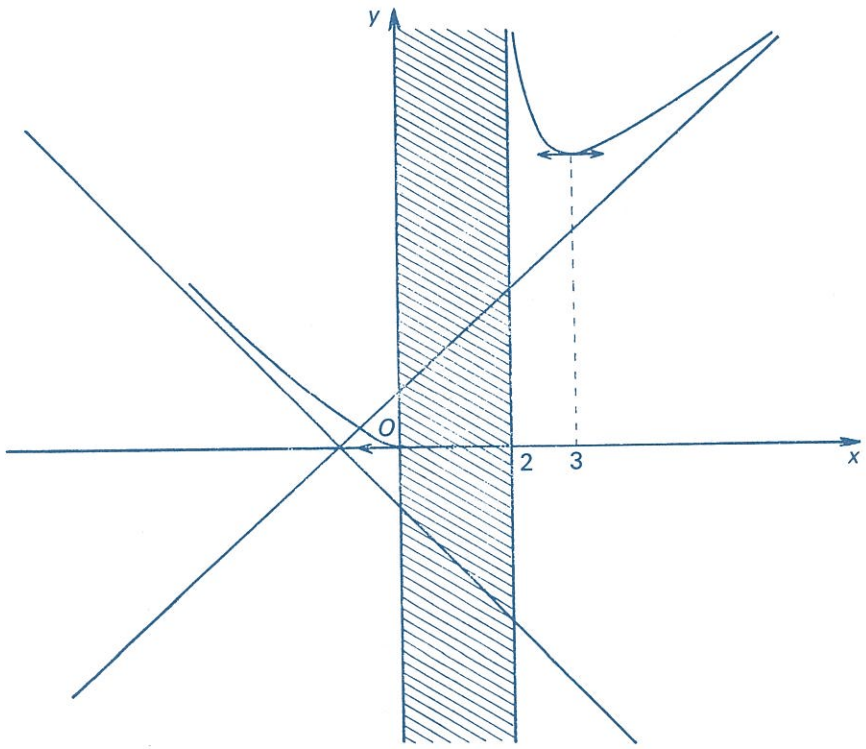


Figure 9.

■ **40.** Étudier la fonction

$$y = \log_x (x + 1).$$ Graphe

On a $y = \dfrac{\text{Log}\,(x+1)}{\text{Log}\,x}$; y est définie pour $x > 0$ et $x \neq 1$.

$$y' = \frac{\dfrac{1}{x+1}\text{Log}\,x - \dfrac{1}{x}\text{Log}\,(x+1)}{(\text{Log}\,x)^2} = \frac{x\,\text{Log}\,x - (x+1)\,\text{Log}\,(x+1)}{x\,(x+1)\,(\text{Log}\,x)^2}$$

Le dénominateur est positif ou nul. Étudions le signe du numérateur

$$z(x) = x\,\text{Log}\,x - (x+1)\,\text{Log}\,(x+1)$$

$$z'(x) = \text{Log}\frac{x}{x+1} = -\,\text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 0 \qquad \text{puisque} \qquad x > 0$$

$z(x)$ est donc une fonction décroissante. Par ailleurs $z(0) = 0$; $z(x)$ est donc négative ou nulle; $y(x)$ est donc décroissante.

Valeurs particulières de y.

Lorsque $x \to 0$ $\quad y \to 0$
Lorsque $x \to 1_{-0}$ $\quad y \to -\infty$
Lorsque $x \to 1_{+0}$ $\quad y \to +\infty$
Lorsque $x \to +\infty$:

$$y = \frac{\operatorname{Log}(x+1)}{\operatorname{Log} x} = \frac{\operatorname{Log} x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{Log} x} = 1 + \frac{\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{Log} x} \to 1.$$

D'où le tableau :

x	0		1		$+\infty$
y	0	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	1

Tangente en O.

$$\frac{y}{x} = \frac{\operatorname{Log}(x+1)}{x \operatorname{Log} x} \sim \frac{x}{x \operatorname{Log} x} = \frac{1}{\operatorname{Log} x} \to 0.$$

Graphe.

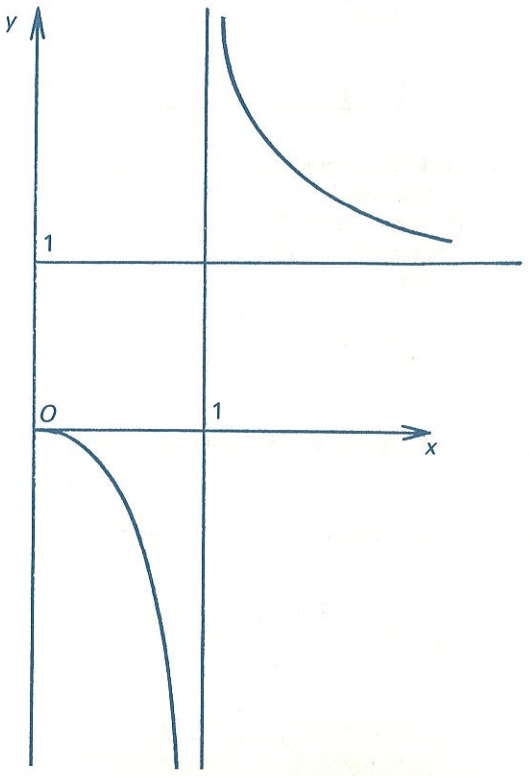


Figure 10.

41. Étudier la fonction

$$y = x^{\frac{x}{1-x}}.$$ Graphe

$y = e^{\frac{x}{1-x}\text{Log}\,x}$ est définie pour $x > 0$ et $x \neq 1$.

On a

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{(1-x)^2}[\text{Log}\,x + 1 - x]$$

y est positif. Le signe de y' n'apparaît pas clairement. C'est le signe de :

$$z(x) = \text{Log}\,x + 1 - x$$

Étudions la fonction $z(x)$.

$$z'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

x	0		1		$+\infty$
z'	$+\infty$	$+$	0	$-$	
z	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Le maximum de $z(x)$ étant nul, $z(x)$ est toujours négative (ou nulle), et donc y toujours décroissante.

Cherchons les *valeurs particulières* de y.

Lorsque $x \to 0$, $x\,\text{Log}\,x \to 0$, et $y \to 1$.

Lorsque $x \to +\infty$

$$\frac{x}{1-x} \to -1 \quad \text{et} \quad \frac{x}{1-x}.\text{Log}\,x \to -\infty.$$

Donc $y \to 0$.

Lorsque $x \to 1_{+0}$ ou 1_{-0}, l'exposant de y se présente sous forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Posons $x = 1 + t$ (t tend vers zéro), et utilisons un développement limité au premier ordre

$$\frac{x}{1-x}\text{Log}\,x = \frac{1+t}{-t}\text{Log}\,(1+t) \sim \frac{1}{-t} \times t = -1$$

Donc

$$y \to e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Ce résultat est valable pour $x = 1_{+0}$ ou $x = 1_{-0}$. On ne peut à proprement parler dire que y est continue pour $x = 1$ (puisqu'elle n'est pas définie). Néanmoins la limite à droite et la limite à gauche sont égales. Nous pouvons prendre $y(1) = \frac{1}{e}$, et y sera une fonction continue pour $x > 0$.

D'où le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
y'	$-$		$-$		
y	1	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Tangentes aux points remarquables.

Pour $x \to 0 \quad y' \to -\infty$.

Pour $x = 1 \quad y'$ se présente sous forme indéterminée $\frac{0}{0}$

$$y' = \frac{y}{(1-x)^2}[\operatorname{Log} x + 1 - x] \sim \frac{\frac{1}{e}}{(1-x)^2}[\operatorname{Log} x + 1 - x].$$

Posons $x = 1 + t$

$$y' \sim \frac{1}{et^2}[\operatorname{Log}(1+t) - t]$$

or

$$\operatorname{Log}(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + 0(t^2)$$

$$y' \sim \frac{\frac{-t^2}{2}}{et^2} = -\frac{1}{2e}.$$

D'où le graphe

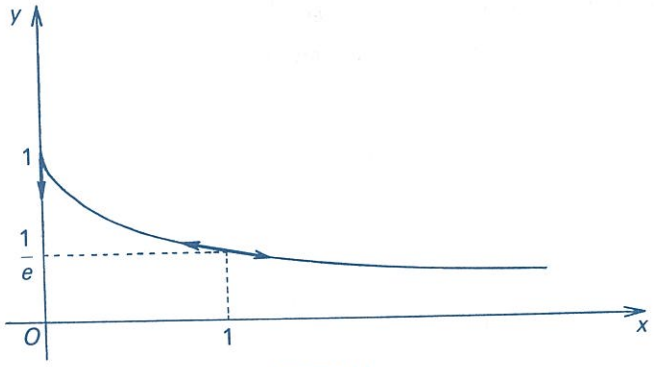


Figure 11.

■ **42.** Étudier la fonction

$$y = \text{Log}\,|\,\text{Log}\,|\,x\,|\,|. \quad \text{Graphe.}$$

---

y est manifestement paire. Nous l'étudierons donc pour $x > 0$, et nous effectuerons sur le graphe une symétrie par rapport à Oy. Soit

$$y = \text{Log}\,|\,\text{Log}\,x\,|$$

cette fonction n'est pas définie pour $x = 0$, ni pour $\text{Log}\,x = 0$, soit $x = 1$. y prend deux formes suivant le signe de Log x.

Si $\text{Log}\,x > 0$ c'est-à-dire $x > 1$ $\quad y = y_1 = \text{Log}\,(\text{Log}\,x)$
Si $\text{Log}\,x < 0 \quad 0 < x < 1$ $\quad y = y_2 = \text{Log}\,(-\text{Log}\,x)$

mais dans tous les cas

$$(\text{Log}\,|\,u\,|)' = \frac{u'}{u}$$

et

$$y' = \frac{(\text{Log}\,|\,x\,|)'}{\text{Log}\,|\,x\,|} = \frac{1}{x\,\text{Log}\,|\,x\,|} = \frac{1}{x\,\text{Log}\,x} \qquad \text{puisque ici} \quad x > 0.$$

D'où le tableau :

x	0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Étude de la branche infinie pour $x \to +\infty$.

$y = \text{Log}(\text{Log } x)$ $\quad \dfrac{y}{x} = \dfrac{\text{Log}(\text{Log } x)}{x} < \dfrac{\text{Log } x}{x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

La dernière inégalité vient de ce que $\text{Log } z < z \ \forall\ z$. Il y a donc une branche parabolique de direction asymptotique Ox.

Par ailleurs la courbe coupe Ox pour $|\text{Log } x| = 1$.
Soit

$$\text{Log } x = \pm 1 \quad \text{et} \quad x = e \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{e}$$

Concavité :

Étudions la dérivée seconde. y'_1 et y'_2 ont même expression :

$$y' = \frac{1}{x \text{ Log } x}$$

et donc

$$y'' = \frac{-1}{x^2 \text{ Log}^2 x}[1 + \text{Log } x]$$

qui change donc de signe pour $x = \dfrac{1}{e}$. D'où le graphe

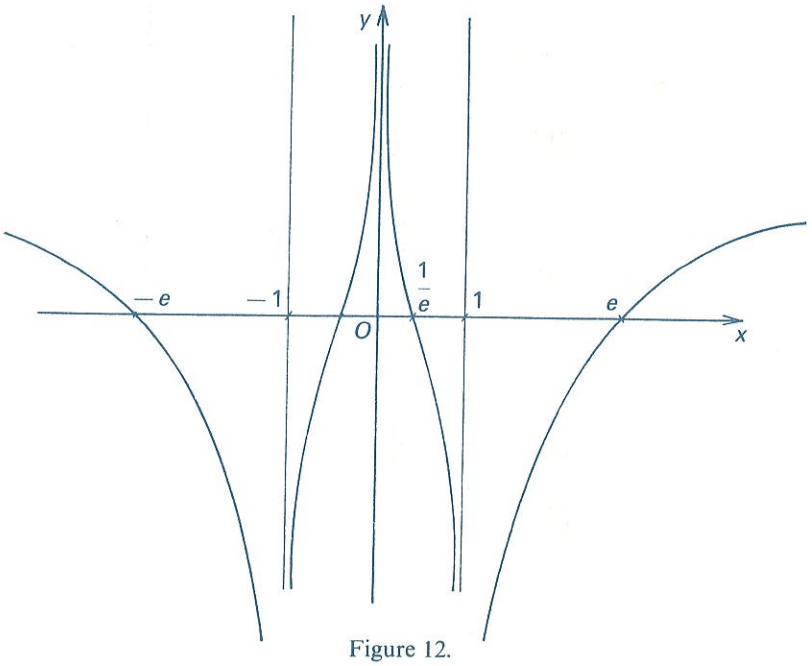


Figure 12.

La tangente d'inflexion a pour pente $-e$.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Calculer	***Réponses***	
	type de l'indétermination	*résultat*
$\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{Log}\dfrac{x+1}{x+2}}{\sin\dfrac{x+1}{x^2+2}}$	$\dfrac{0}{0}$	-1
$\lim_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \operatorname{Log} x}$	$\dfrac{0}{0}$	-2
$\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$	1^∞	$\sqrt{ab}$
$\lim_{x\to 1} [(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}]$	1^∞	$e^{\frac{2}{\pi}}$
$\lim_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)\operatorname{Arc}\sin x}{x\operatorname{tg}^2 x}$	$\dfrac{0}{0}$	$\dfrac{1}{2}$
$\lim_{x\to 0} [\operatorname{Log}(1+\sin x)]^{\sin x}$	0^0	1
$\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Log}(1+x^2)}{x\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x}$	$\dfrac{0}{0}$	1
$\lim_{x\to 0} (\cos x + \sin x)^{\operatorname{cotg} x}$	1^∞	e
$\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\operatorname{ch} x}{1-\cos x}$	$\dfrac{0}{0}$	-1
$\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x - x}{x - \operatorname{Log}(1+x)}$	$\dfrac{0}{0}$	2
$\lim_{m\to 0} \dfrac{1}{m^2}\left(\dfrac{\sin mx}{\sin ml} - \dfrac{x}{l}\right)$	$\infty \cdot 0$	$\dfrac{x}{6l}(l^2 - x^2)$

Calculer	***Réponses***	
	type de l'indétermination	*résultat*
$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x^2}$	$\infty \cdot 0$	0
$\lim_{x\to\infty} (x\sqrt{x}) \times (\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x})$	$\infty - \infty$	$\frac{1}{4}$
$\lim_{x\to\infty} x^2 \left[e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right]$	$\infty \cdot 0$	1
$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+x) - \sin x + 1 - \cos x}{\operatorname{tg} x - x}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{3}{2}$
$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{Log} x}$	1^∞	1
$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{Arc\,tg}(2\sin x) - \frac{\pi}{4}}{\cos 3x}$	$\frac{0}{0}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x \operatorname{Log}(1+x)}{e^x + \cos x - \sin x - 2}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{3}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\begin{cases} 0 & \text{si } x \to -0 \\ -\infty & \text{si } x \to +0 \end{cases}$
$\lim_{x\to+\infty} e \cdot \sqrt{x^2 - x + 1} - x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	$\infty - \infty$	0
$\lim_{x\to+\infty} x - \operatorname{Log} \operatorname{ch} x$	$\infty - \infty$	$\operatorname{Log} 2$
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[(1+\operatorname{sh} x)^{\operatorname{cotg} x} - e\right]$	$\frac{0}{0}$	$-\frac{e}{2}$

CHAPITRE 8

INTÉGRALES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE

L'objet du calcul intégral est la détermination des fonctions dont on connaît la dérivée ou la différentielle. C'est également la détermination de la limite d'une somme de quantités infiniment petites dont le nombre augmente indéfiniment. En étudiant l'intégrale de Riemann, nous allons voir que ces deux problèmes, en apparence distincts, se ramènent bien l'un à l'autre.

1. INTÉGRALE DE RIEMANN

Nous limiterons notre étude au cas des fonctions continues. Supposons que la fonction $f(x)$ soit continue, et monotone croissante; supposons d'autre part que $f(x)$ ne prenne que des valeurs finies dans l'intervalle $[a, b]$ et que $f(a)$ et $f(b)$ soient positifs.

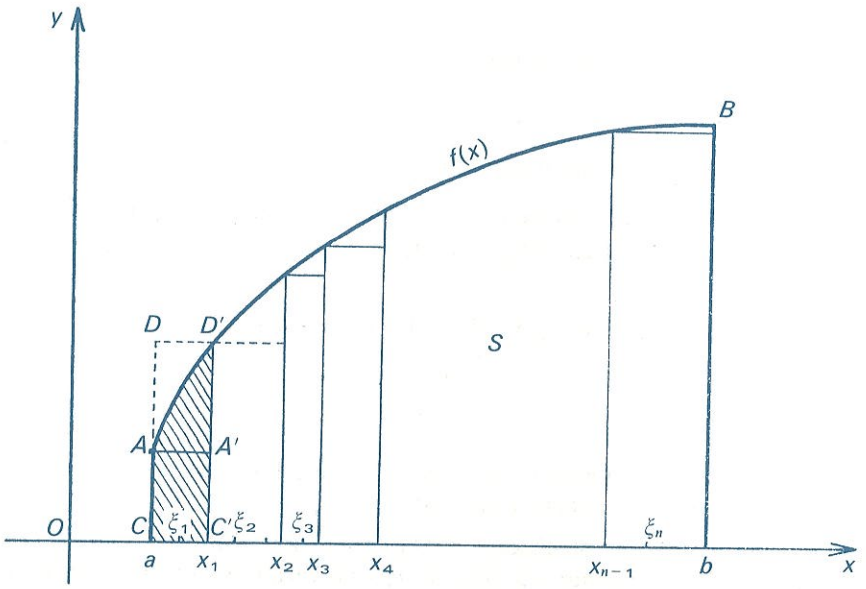


Figure 1.

Divisons l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles par les points $x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ et considérons les deux sommes :

$$\sum_n = (x_1 - a)\, f(a) + (x_2 - x_1)\, f(x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1})\, f(x_{n-1})$$

et $$\sum'_n = (x_1 - a)\, f(x_1) + (x_2 - x_1)\, f(x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1})\, f(x_n).$$

Le terme $(x_1 - a)\, f(a)$ représente l'aire σ_1 du rectangle $AA'C'C$.

Le terme $(x_1 - a)\, f(x_1)$ représente l'aire σ'_1 du rectangle $DD'C'C$.

Si le nombre des intervalles élémentaires augmente indéfiniment, la mesure de chacun d'eux tendant vers 0, nous allons vérifier que $\sum'_n - \sum_n \to 0$.

$$\sum'_n - \sum_n = (x_1 - a)\,[f(x_1) - f(a)] + (x_2 - x_1)\,[f(x_2) - f(x_1)] + \ldots + (x_n - x_{n-1})\,[f(x_n) - f(x_{n-1})].$$

Désignons par U le plus grand des intervalles partiels

$$x_1 - a, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}.$$

$$\sum'_n - \sum_n < U \,.\, [f(b) - f(a)].$$

Lorsque n tend vers l'infini $U \to 0$ et $\sum'_n - \sum_n \to 0$: or $\sum_n < S < \sum'_n$, si S est l'aire du domaine $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. Donc $\sum_n$ et $\sum'_n \to S$.

Soit maintenant $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ n valeurs quelconques appartenant respectivement aux intervalles $x_1 - a, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}$. La somme :

$$S_n = (x_1 - a)\, f(\xi_1) + (x_2 - x_1)\, f(\xi_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1})\, f(\xi_n)$$

appelée somme de Riemann, est telle que :

$$\sum_n < S_n < \sum'_n.$$

Elle admet donc même limite que $\sum_n$ et $\sum'_n$ lorsque n tend vers l'infini.

Si la fonction n'est pas monotone dans l'intervalle $[a, b]$, il suffira de diviser l'intervalle $[a, b]$ en différents intervalles sur lesquels $f(x)$ est monotone.

La limite commune de $\sum'_n$, $\sum_n$, S_n se désigne par le symbole :

$$S = \int_a^b f(x)\, dx$$

qui se lit « somme de a à b de $f(x)\, dx$, ou intégrale définie de a à b de $f(x)\, dx$ », et on dit que la fonction $f(x)$ est intégrable sur (a, b).

La démonstration précédente s'adapterait sans difficulté dans le cas d'une fonction décroissante, ou dont le sens de variation change un nombre fini de fois.

2. VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE $[a, b]$

On appelle valeur moyenne d'une fonction, sur un intervalle $[a, b]$ la quantité

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx} \tag{1}$$

Si m et M désignent la borne inférieure et la borne supérieure de $f(x)$ sur $[a, b]$, les valeurs $f(x_i)$ qui interviennent dans les deux sommes précédentes $\sum_n$ et $\sum'_n$ sont comprises entre m et M :

$$m \leqslant f(x_i) \leqslant M$$

$\sum_n$ et $\sum'_n$ sont donc comprises entre $m(b-a)$ et $M(b-a)$ et il en est de même de leur limite commune :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a).$$

Divisons par $b-a$ les termes de cette double inégalité, nous obtenons :

$$m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx < M$$

ou

$$\boxed{m < \mu < M} \tag{2}$$

D'autre part si $f(x)$ est continue sur $[a,b]$ il existe une valeur ξ de x comprise entre a et b et telle que :

$$\mu = f(\xi) \tag{3}$$

3. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

L'interprétation géométrique de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$ est immédiate.

Supposons pour fixer les idées $f(x) > 0$ sur $[a, b]$. L'aire du rectangle $ABCD$ de côtés $AB = b - a$ et $AD = \mu$ est égale à l'aire hachurée de la figure 2.

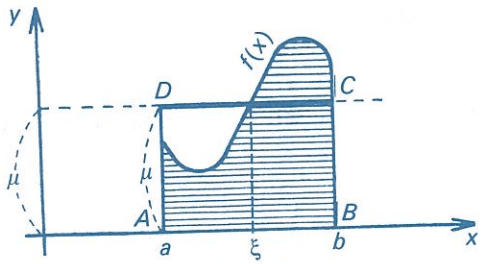


Figure 2.

4. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE L'INTÉGRALE DÉFINIE

a) De la définition du symbole $\int_a^b f(x)\,dx$ découlent les propriétés traduisant la linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

où λ est une constante.

b) Si $f(x) > 0$ sur l'intervalle $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

est positive.

En effet si $f(x) > 0$, tous les termes des sommes $\sum_n$ et $\sum'_n$ sont positifs.

c) Si pour toute valeur de l'intervalle $[a, b]$, $f(x) < g(x)$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx.$$

En effet :

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$$

sera positive puisque $g(x) - f(x) > 0$.

d) Si on permute les bornes de l'intervalle $[a, b]$, les accroissements $\Delta x = x_{k+1} - x_k$ changent de signe dans $\sum_n$ et $\sum'_n$, donc :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

e) Supposons que c soit un nombre fixe compris entre a et b. On peut partager l'intervalle $[a, b]$ en $[a, c]$ et $[c, b]$ et partager ceux-ci en intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ tendant vers 0. En additionnant les sommes relatives à chaque intervalle on aura :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

Si $f(x)$ est intégrable sur $[a, b]$, il en est de même de $|f(x)|$ et de plus

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Cette inégalité découle immédiatement des sommes de Riemann correspondantes :

$$\left|\sum_0^n (x_{p+1} - x_p)\, f(\xi_p)\right| \leqslant \sum_0^n (x_{p+1} - x_p) \cdot |f(\xi_p)|$$

5. THÉORÈME DE LA MOYENNE

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont continues sur $[a, b]$ et si $g(x)$ a un signe constant, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

Soient m et M les bornes de $f(x)$ sur $[a, b]$:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

et si pour fixer les idées $g(x) > 0$

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$$

le produit $f(x)\,g(x)$ est intégrable sur $[a, b]$ comme produit de fonctions continues, et si $a < b$ on a

$$mg(x) \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M \int_a^b g(x)\,dx$$

Comme $f(x)$ est continue, elle prend au moins une fois toute valeur comprise entre m et M.

Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx}$$

6. INÉGALITÉ DE SCHWARZ

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont continues sur $[a, b]$, λ un réel quelconque et en supposant $a < b$ on peut affirmer que $(f + \lambda g)^2$ est intégrable sur $[a, b]$ et que

$$\int_a^b [f(x) + \lambda g(x)]^2\,dx \geqslant 0$$

En développant

$$\lambda^2 \int_a^b [g(x)]^2\,dx + 2\lambda \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b [f(x)]^2\,dx \geqslant 0$$

condition qui ne sera vérifiée pour tout λ que si, et seulement si le discriminant du trinôme en λ est négatif ou nul, ou ce qui revient à

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx \times \int_a^b g^2(x)\,dx}}$$

inégalité dite de Schwarz. L'égalité est obtenue lorsque $f(x) + \lambda g(x) = 0$ $\forall\, x \in [a, b]$ donc si et seulement si $f(x)$ et $g(x)$ sont dans un rapport constant.

Si en effet x subit un accroissement Δx, l'accroissement correspondant de J sera :

$$\Delta J = J(x + \Delta x) - J(x)$$

$$= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

$$\frac{\Delta J}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Cette quantité est la valeur moyenne de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[x, x + \Delta x]$.

Nous avons vu que si $f(x)$ est continue il existe une valeur ξ, comprise entre x et $x + \Delta x$ et telle que $\Delta J/\Delta x = f(\xi)$.

Lorsque $\Delta x \to 0$, $\xi \to x$ puisque $x < \xi < x + \Delta x$ et $J'(x) = f(x).J(x)$ est une primitive de $f(x)$.

On désigne l'ensemble des primitives de $f(x)$ par le symbole $\int f(x)\,dx$ qui se lit « somme de $f(x)\,dx$ » et qui est appelée *intégrale indéfinie.*

Nous avons vu en particulier (chap. 3) que l'aire S_a^x comprise entre la courbe représentative de $y = f(x)$ et les droites d'abscisses a et x, est

$$\int_a^x f(t)\,dt.$$

Si F est une primitive quelconque de $f(x)$

$$S_a^x = F(x) - F(a).$$

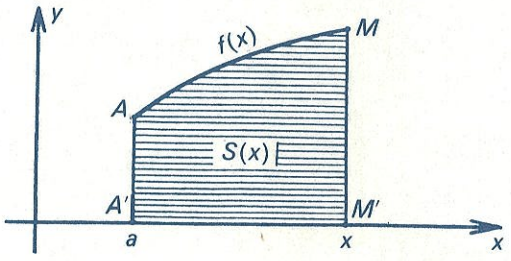


Figure 3.

En particulier $S_a^b = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = \int_a^b f(x)\,dx.$

Résumé du chapitre 8

- **Intégrale de Riemann.**

On désigne par

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

la limite quand n tend vers l'infini de la somme

$$(x_1 - a)\,f(\xi_1) + (x_2 - x_1)\,f(\xi_2) + \ldots + (b - x_{n-1})\,f(\xi_n)$$

l'intervalle $[a, b]$ étant divisé en n intervalles quelconques par les points d'abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ étant les abscisses de n points quelconques pris dans ces n intervalles.

- **Valeur moyenne de $f(x)$ sur $[a, b]$.**

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

- **Propriétés de l'intégrale définie.**

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx + \mu\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

- **Inégalité de Schwarz.**

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx \times \int_a^b g^2(x)\,dx}$$

• **Théorème de la moyenne.**

Si $g(x)$ a un signe constant sur $[a, b]$, il existe une valeur $c \in [a, b]$ telle que

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx$$

EXERCICES

■ **1.** Calculer la limite de la somme

$$S_n = \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha + \beta} + \frac{1}{n\alpha + 2\beta} + \ldots + \frac{1}{n\alpha + (n-1)\beta}$$

lorsque l'entier n augmente indéfiniment ($\alpha > 0$; $\beta > 0$).

On peut écrire

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + \frac{\beta}{n}} + \frac{1}{\alpha + \frac{2\beta}{n}} + \ldots + \frac{1}{\alpha + \frac{(n-1)\beta}{n}}\right]$$

Soit

$$f(x) = \frac{1}{\alpha + \beta x}$$

$$S_n = \frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction f dans l'intervalle $[0, 1]$ après division de cet intervalle en n parties égales.

Lorsque n tend vers l'infini, S_n a pour limite l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\alpha + \beta x} = \frac{1}{\beta} \operatorname{Log} \frac{\alpha + \beta}{\alpha}.$$

■ **2.** Trouver la limite de la somme

$$I_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

lorsque l'entier n augmente indéfiniment.

On peut écrire

$$I_n = \frac{1}{n}\left[\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right]$$

Soit

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$I_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f(1)\right]$$

et en appliquant la méthode de l'exercice précédent

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{2}{3}$$

■ **3.** Trouver la limite quand x tend vers 1 de la fonction

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\operatorname{Log} t}$$

Quand $x \to 1$, les deux bornes tendent vers 1, mais $\frac{1}{\operatorname{Log} t}$ devient infini puisque tout nombre $t \in [x, x^2]$ tend vers 1. Il y a donc indétermination.

Posons $\operatorname{Log} t = u$, $t = e^u$, on obtient

$$f(x) = \int_{\operatorname{Log} x}^{2\operatorname{Log} x} \frac{e^u\,du}{u}$$

e^u garde un signe constant, e^u et $\frac{1}{u}$ sont continues sur l'intervalle d'intégration (car Log x et 2 Log x sont de même signe), on peut donc écrire d'après le théorème de la moyenne :

$$f(x) = e^c \int_{\operatorname{Log} x}^{2\operatorname{Log} x} \frac{du}{u} \qquad \text{avec} \qquad c \in]\operatorname{Log} x, 2\operatorname{Log} x[$$

soit $\quad f(x) = e^c\,[\operatorname{Log}(2\operatorname{Log} x) - \operatorname{Log}(\operatorname{Log} x)] = e^c \operatorname{Log} 2$

Or quand $x \to 1$, Log x et 2 Log x, ainsi que c, tendent vers 0, et $e^c \to 1$.

Donc $\quad \lim_{x\to 1} f(x) = \operatorname{Log} 2$

■ **4.** Soit $f(x)$ intégrable sur $[a, b]$, avec $a < b$. On appelle μ la valeur moyenne de f sur $[a, b]$, et on définit la « valeur efficace » de f sur $[a, b]$ par la formule

$$f_e = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^2\,dx}\,.$$

Comparer f_e et $|\mu|$.

Appliquons l'inégalité de Schwarz à $f(x)$ et à la fonction $g(x) = 1$. On obtient :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx \cdot \int_a^b dx} = \sqrt{b-a} \cdot f_e \cdot \sqrt{b-a}$$

Or

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \text{donc} \qquad \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = (b-a)\,|\mu|,$$

il en résulte $|\mu| \leqslant f_e$.

Par exemple, pour la fonction sinusoïdale $f(t) = \sin \omega t$, la valeur moyenne sur la demi-période $\left[0, \frac{\pi}{\omega}\right]$ est

$$\mu = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \omega t\,dt = \frac{\omega}{\pi} \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{2}{\pi} \simeq 0{,}637$$

La valeur efficace est

$$f_e = \sqrt{\frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin^2 \omega t\,dt} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi} \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}707$$

On a bien $|\mu| < f_e$.

CHAPITRE 9

CALCUL DES PRIMITIVES ET DES INTÉGRALES DÉFINIES

De nombreux problèmes, d'origine purement mathématique ou d'origine physique, exigent une ou plusieurs intégrations; on entend par là aussi bien le calcul d'une primitive d'une fonction, par exemple en vue de résoudre une équation différentielle, que celui d'une intégrale définie. Ce dernier problème se ramène au calcul d'une primitive, sauf dans certains cas exceptionnels où on peut s'en passer.

Aussi nous étudierons tout d'abord les méthodes générales de calcul des primitives, avec dans certains cas leur adaptation aux intégrales définies. Nous aborderons ensuite succinctement les méthodes de calcul approché des intégrales définies, permettant l'utilisation de calculatrices, programmables ou non.

1. PRINCIPES GÉNÉRAUX

Primitives usuelles immédiates

Nous entendons par là celles qui résultent, sans calcul, de la lecture du tableau des dérivées usuelles. On obtient ainsi, en appelant $F(x)$ une primitive de $f(x)$ (la primitive la plus générale étant alors $F(x) + C$, où C est une constante arbitraire), le tableau page 168.

Intégration par décomposition en somme (linéarisation)

En utilisant $\int (\lambda f(x) + \mu g(x))\ \mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\ \mathrm{d}x + \mu \int g(x)\ \mathrm{d}x$, où λ et μ sont des constantes, on peut déjà calculer d'assez nombreuses intégrales.

$f(x)$	$F(x)$	Domaine de validité
a (réel donné)	ax	$\mathbb{R}$
x^n, n entier naturel	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
x^n, n entier relatif $\neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
x^α, α réel $\neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x}$	$\operatorname{Log}\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$\operatorname{tg} x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$	$-\operatorname{cotg} x$	$x \neq k\pi$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
a^x,(a positif $\neq 1$)	$\frac{a^x}{\operatorname{Log} a}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{coth}^2 x - 1$	$-\operatorname{coth} x$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{Arc tg} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{Arg th} x = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x}$	$]-1, +1[$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arc sin} x$	$]-1, +1[$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{Arg sh} x = \operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2+1})$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Arg ch} x = \operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2-1})$	$]1, +\infty[$

Exemples.

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1) \, dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C$$

$$\int \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^2 + 1} \, dx = \int_0^1 \frac{x^4 - 1 + 1}{x^2 + 1} \, dx = \int_0^1 (x^2 - 1) \, dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{Arc\,tg} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$$

Ce procédé sera systématique pour certaines formes de fonctions.

Intégration par parties

$u(x)$ et $v(x)$ étant deux fonctions dérivables sur un même domaine $\mathbb{D}$, on sait que $d(uv) = udv + vdu = uv' \, dx + vu' \, dx$.

On en déduit la formule dite d'« intégration par parties » :

$$\int \boldsymbol{u \, dv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v \, du}$$

ou

$$\int uv' \, dx = uv - \int vu' \, dx$$

ou, pour une intégrale définie,

$$\int_a^b \boldsymbol{uv' \, dx} = [\boldsymbol{uv}]_a^b - \int_a^b \boldsymbol{vu' \, dx}$$

Dans la pratique, ceci permet de calculer, ou de simplifier, certaines intégrales $\int f(x) \, dx$ où $f(x)$ est le produit d'une fonction u et d'une fonction w facile à intégrer ($w = v'$).

Exemple.

Calculons $A = \int_0^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{Log}(x^2 + 1) \, dx$.

Nous poserons $\text{Log}\,(x^2 + 1) = u$, $x^2\,dx = dv$ (ou $x^2 = v'$),

d'où $$du = \frac{2x\,dx}{x^2 + 1}, \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

et $$A = \left[\frac{x^3}{3}\text{Log}\,(x^2 + 1)\right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4}{x^2 + 1}\,dx$$

$$= \sqrt{3}\,\text{Log}\,4 - \frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1}\right)dx$$

$$= \sqrt{3}\,\text{Log}\,4 - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3} - x + \text{Arc tg}\,x\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\left(\sqrt{3}\,\text{Log}\,2 - \frac{\pi}{9}\right)$$

Principaux cas d'emploi de l'intégration par parties :

a) $\int P(x)e^{\alpha x}\,dx$, où P est un polynôme, α un réel donné.

En posant $P(x) = u$, $e^{\alpha x}\,dx = dv$, on est ramené à $\int P'(x)e^{\alpha x}\,dx$, qui est de la même forme mais avec un polynôme de degré inférieur à celui de P; en réitérant l'opération s'il y a lieu, on arrive ainsi de proche en proche *à*

$$\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C$$

Le même procédé s'applique à

$$\int P(x)\cos \alpha x\,dx, \qquad \int P(x)\sin \alpha x\,dx, \qquad \int P(x)\,\text{ch}\,\alpha x\,dx, \qquad \int P(x)\,\text{sh}\,\alpha x\,dx$$

Exemple.

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x\,dx = [x^2 \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \sin x\,dx = [2x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\cos x\,dx$$

$$= -2\pi$$

b) $\int f(x)\,g(x)\,dx$, où g est une fonction rationnelle (ou parfois seulement algébrique) et f une fonction transcendante [1] de dérivée algébrique.

---

[1] On appelle ainsi une fonction $f(x)$ non algébrique, c'est-à-dire ne se déduisant pas de x par des opérations algébriques (exemples e^x, $\text{Log}\,|x|$, $\sin x$...).

En posant $f(x) = u$, $g(x)\,dx = dv$, on arrive à une intégrale plus simple, sauf si v est une fonction transcendante.

Exemples.

On vérifiera facilement par ce procédé que

$$\int x \operatorname{Arc tg} x\,dx = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{Arc tg} x - \frac{x}{2} + C,.$$

mais que $\displaystyle\int \frac{\operatorname{Arc tg} x}{x}\,dx$ conduit à un « cercle vicieux ».

Changement de variable dans une intégrale indéfinie

a) Principe. On sait que $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx \Leftrightarrow dF(x) = f(x)\,dx$.

Si $x = \varphi(t)$ définit une bijection du domaine $\mathbb{D}$ de définition de f dans un domaine Δ, la fonction réciproque étant $t = \psi(x)$, on sait que

$$d\left[F(\varphi(t))\right] = F'\left[\varphi(t)\right] \cdot \varphi'(t)\,dt = f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt,$$

donc
$$F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \Phi(t)$$

Si cette dernière intégrale peut être calculée, sa valeur $\Phi(t)$ fournit

$$F(x) = \Phi\left[\psi(x)\right]$$

b) Pratiquement, deux cas peuvent se présenter :

- On introduit directement $\psi(x)$, φ n'intervient alors pas.

Exemple.

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x}\,dx = \int \frac{d(\sin x)}{1 + \sin^2 x} = \operatorname{Arc tg}(\sin x) + C$$

- On introduit d'abord $\varphi(t)$, pour simplifier f.

Exemple.

$$F(x) = \int x^2 \sqrt{x^2+1}\,dx$$

Le changement de variable $x = \operatorname{sh} t$, bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, permet d'éliminer le radical, on obtient ainsi

$$\Phi(t) = \int \operatorname{sh}^2 t \,.\, \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1} \,.\, \operatorname{ch} t \, dt = \int \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^2 t \, dt$$

$$= \frac{1}{4} \int \operatorname{sh}^2 2t \, dt = \frac{1}{8} \int (\operatorname{ch} 4t - 1) \, dt$$

$$= \frac{1}{32} \operatorname{sh} 4t - \frac{1}{8} t + C$$

$$= \frac{1}{16} \operatorname{sh} 2t \operatorname{ch} 2t - \frac{1}{8} t + C$$

$$= \frac{1}{8} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t (2 \operatorname{sh}^2 t + 1) - \frac{1}{8} t + C$$

Or $\operatorname{sh} t = x$, $\operatorname{ch} t = \sqrt{x^2 + 1}$ et $t = \operatorname{Arg\,sh} x$, il vient donc

$$F(x) = \frac{1}{8} [x (2x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1} - \operatorname{Arg\,sh} x] + C.$$

Changement de variable dans une intégrale définie

La même méthode s'applique au départ. Soit, avec les mêmes notations,

$$I = \int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)],$$

Si nous posons $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$, donc

$$I = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \, \varphi'(t) \, dt$$

On voit qu'il est inutile d'envisager le retour à la variable x; le changement de variable dans une intégrale $\int_a^b f(x) \, dx$ est donc à répercuter en trois points : dans la fonction $f(x)$; dans la différentielle dx; dans les bornes. On est ainsi amené à une intégrale suivant la variable t dans laquelle il est possible d'effectuer d'autres changements de variables successifs, toujours sans retour en arrière.

Exemple.

Soit à calculer

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^3 x \, dx}{\sqrt{\cos 2x}}$$

On écrit

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x \,.\, \mathrm{d}(\sin x)}{\sqrt{1 - 2\sin^2 x}}$$

D'où l'idée du changement de variable $\sin x = t$, bijectif sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$. Les bornes deviennent $t_1 = \sin 0 = 0$, $t_2 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, donc

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1 - t^2)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - 2t^2}}$$

On peut éliminer le radical en posant $t\sqrt{2} = \sin u$, $u = \operatorname{Arc\,sin}(t\sqrt{2})$, les bornes deviennent $u_1 = \operatorname{Arc\,sin} 0 = 0$, $u_2 = \operatorname{Arc\,sin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, donc

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 u\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos u \,\mathrm{d}u}{\cos u} \qquad (\text{car } \cos u > 0)$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 - \sin^2 u)\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2 - \frac{1 - \cos 2u}{2}\right) \mathrm{d}u,$$

Soit enfin

$$A = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{3}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{32}(3\pi + 2)$$

Notons que dans l'immédiat, il n'est pas question d'imaginer sans indication les changements de variables adaptés à une intégrale donnée, mais seulement de savoir les mettre en œuvre. Les paragraphes suivants (3, 4 et 5) seront, en fait, l'adaptation technique à diverses formes classiques d'intégrales des trois grands principes vus dans celui-ci : linéarisation, intégration par parties, changement de variable; le but étant de ramener le calcul à des intégrales usuelles, celles vues plus haut ou quelques autres qui feront l'objet d'un second tableau.

Quelques applications immédiates du changement de variable

a) Si $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, $\int f(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{F(ax)}{a} + C \quad (a \neq 0)$.

b) Si f est une fonction impaire,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2$$

Dans I_1, posons $x = -t$, on obtient, puisque $f(-t) = -f(t)$

$$I_1 = \int_a^0 f(-t).(-\mathrm{d}t) = -\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = -I_2,$$

donc

$$\boldsymbol{f \text{ impaire} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0}$$

ce qui est d'ailleurs évident graphiquement (fig. 1).

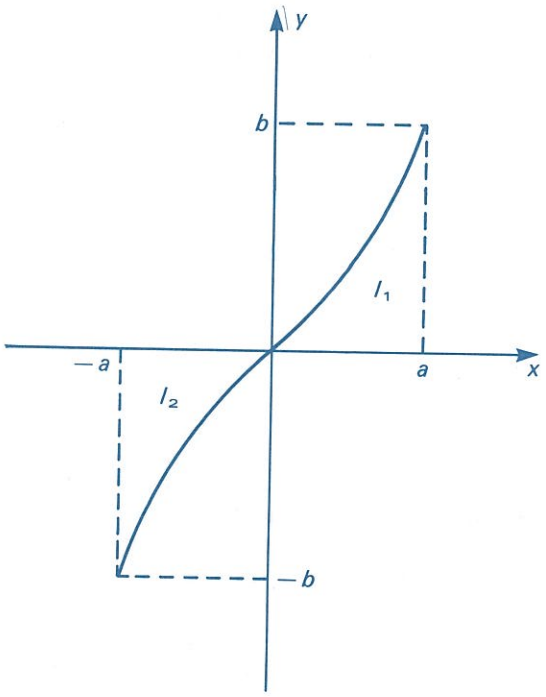


Figure 1.

On démontrerait de même que

$$\boldsymbol{f \text{ paire} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x}$$

c) $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Log}\,|u(x)| + C.$

Second tableau de primitives usuelles

Ces primitives s'obtiennent par des calculs très simples dont nous laissons le soin au lecteur, et pourront être utilisées sans dèmonstration dans les calculs d'intégrales, au même titre que celles du premier tableau. C'est ainsi que nous envisagerons ensuite des méthodes générales de calcul d'intégrales appartenant à des types classiques. Notons dès à présent que si on sait dériver à peu près n'importe quelle fonction, on ne sait en général pas l'intégrer : de nombreuses fonctions élémentaires n'ont pas de primitives élémentaires, telles $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{\operatorname{Log}|x|}$, $\sqrt{x^3+1}$. Cependant une étude satisfaisante d'une primitive de f, non calculable explicitement, peut souvent être effectuée en l'écrivant $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

$f(x)$	$F(x)$	Domaine de validité
$\operatorname{Log}\lvert x\rvert$	$x \operatorname{Log}\lvert x\rvert - x$	$\mathbb{R}^*$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{Log}\lvert\cos x\rvert$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\operatorname{cotg} x$	$\operatorname{Log}\lvert\sin x\rvert$	$x \neq k\pi$
$\operatorname{th} x$	$\operatorname{Log}\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\coth x$	$\operatorname{Log}\lvert\operatorname{sh} x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sin x}$	$\operatorname{Log}\left\lvert\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\rvert$	$x \neq k\pi$
$\frac{1}{\cos x}$	$\operatorname{Log}\left\lvert\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\frac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\operatorname{Log}\left\lvert\operatorname{th}\frac{x}{2}\right\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\operatorname{ch} x}$	$2 \operatorname{Arc tg} e^x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{a^2+x^2}\ (a \neq 0)$	$\frac{1}{a}\operatorname{Arc tg}\frac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{a^2-x^2}\ (a \neq 0)$	$\frac{1}{2a}\operatorname{Log}\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert$	$x \neq \pm a$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a > 0)$	$\operatorname{Arc sin}\frac{x}{a}$	$]-a, +a[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}\ (k \neq 0)$	$\operatorname{Log}\lvert x + \sqrt{x^2+k}\rvert$	$\begin{cases}\mathbb{R}, \text{ si } k > 0\\ \lvert x\rvert > \sqrt{-k}, \\ \text{si } k < 0\end{cases}$

Rappelons encore $\int f(ax)\,dx = \frac{F(ax)}{a} + C,\ a \neq 0.$

2. PRIMITIVES DES FRACTIONS RATIONNELLES

Principe

Sauf cas particuliers, par exemple :

$$\int \frac{5x^4 + 2x}{x^5 + x^2 - 1}\,dx = \text{Log}\,|x^5 + x^2 - 1| + C$$

le calcul de la primitive d'une fraction rationnelle exige la décomposition du dénominateur en un produit de facteurs du premier ou du second degré (ces derniers sans racine réelle). Certains de ces facteurs pouvant se répéter on obtient pour le dénominateur $Q(x)$ un produit de facteurs $(x-a)^\alpha$ et $(x^2 + px + q)^\beta$, où a, p, q sont réels, avec $p^2 - 4q < 0$, et où α et β sont des entiers positifs. Nous admettrons, dans l'immédiat, que cette décomposition est unique; l'étude détaillée sera vue dans le cours d'algèbre. Dans les mêmes conditions, nous admettrons aussi que toute fraction rationnelle irréductible (c'est-à-dire non simplifiable) $\frac{R(x)}{Q(x)}$, où le degré de R est inférieur à celui de Q, peut, d'une façon unique, être décomposée en somme de fractions de la forme $\frac{A_1}{(x-a)}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \ldots, \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}$, ou de la forme

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q}, \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2}, \ldots, \frac{B_\beta x + C_\beta}{(x^2 + px + q)^\beta},$$

dont les coefficients sont réels et dont les dénominateurs sont les facteurs de la décomposition de $Q(x)$.

Par exemple la fraction $\frac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2(x^2 - x + 2)^3}$ peut s'écrire

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 2} + \frac{Ex + F}{(x^2 - x + 2)^2} + \frac{Gx + H}{(x^2 - x + 2)^3}$$

Les fractions de la forme $\frac{A}{(x-a)^n}$ sont appelées éléments simples de première espèce, celles de la forme $\frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^m}$ éléments simples de seconde espèce. Les a, réels, et les racines complexes de $x^2 + bx + c$, sont les pôles de la fraction.

Enfin une fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$, où le degré de P est supérieur ou égal à celui de Q peut s'écrire $S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, où S est un polynôme, quotient de la division euclidienne de R par Q, et R le reste de cette division; $R(x)$ est donc de degré inférieur à $Q(x)$; $S(x)$ est appelée partie entière de la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$. On voit que l'intégration d'une fraction rationnelle, pourvu que l'on sache factoriser son dénominateur, se ramène à celles :

- d'un polynôme, immédiate;
- d'éléments simples de première espèce;
- d'éléments simples de seconde espèce.

Nous allons étudier les types d'intégrales ainsi introduits, mais auparavant indiquer quelques méthodes pratiques de décomposition.

Pratique de la décomposition en éléments simples

Il existe d'assez nombreuses méthodes de calcul des coefficients de la décomposition d'une fraction rationnelle, que nous supposerons sans partie entière, $\frac{R(x)}{Q(x)} = f(x)$. La plus générale, mais souvent longue, consiste à réduire au même dénominateur la décomposition formelle écrite avec des coefficients indéterminés, le dénominateur commun est $Q(x)$, et l'identification du numérateur à $R(x)$ fournit n équations du premier degré à n inconnues, qui admettent une solution unique. Notons à ce propos que le nombre n de coefficients inconnus est égal au degré du dénominateur $Q(x)$: dans l'exemple donné à la page précédente, on a $n = 8$.

En dehors de l'identification, pratiquement déconseillée, on peut, dans les cas couramment rencontrés, retenir les procédés suivants.

a) Pour obtenir la « partie polaire » relative à un pôle réel simple a ($\alpha = 1$), c'est-à-dire $\frac{A}{x - a}$, on écrit

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{(x - a)\, Q_1(x)}, \qquad \text{avec } Q_1(a) \neq 0,$$

et

$$\frac{R(x)}{(x - a)\, Q_1(x)} = \frac{A}{x - a} + \varphi(x),$$

où la fraction φ n'a pas de pôle égal à a. En multipliant les deux membres par $x - a$ et faisant tendre x vers a, on obtient

$$A = \frac{R(a)}{Q_1(a)} = \lim_{x \to a} [(x - a)\, f(x)]$$

On peut aussi observer que $Q_1(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{Q(x) - Q(a)}{x - a} = Q'(a)$, donc $A = \dfrac{R(a)}{Q'(a)}$.

b) Pour obtenir le terme $\dfrac{A}{(x-a)^\alpha}$ de la partie polaire de $f(x)$ relative au pôle réel multiple d'ordre α, on peut de même écrire $A = \lim_{x \to a} [(x-a)^\alpha f(x)]$.

c) Pour obtenir la partie polaire $\dfrac{Bx + C}{x^2 + px + q}$ relative au facteur $x^2 + px + q$ figurant au premier degré dans $Q(x)$, on peut utiliser les racines complexes conjuguées du polynôme $x^2 + px + q$, et, a étant une de ces racines, écrire

$$Ba + C = \lim_{x \to a} [(x^2 + px + q)\, f(x)]$$

(voir exemples plus loin).

d) Pour obtenir le terme $\dfrac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^\beta}$ relatif au facteur $x^2 + px + q$ figurant au degré β dans $Q(x)$, on peut de même écrire (notations du (*c*))

$$Ba + C = \lim_{x \to a} [(x^2 + px + q)^\beta\, f(x)]$$

e) Pour obtenir éventuellement les coefficients manquant encore, on utilise d'autres valeurs numériques finies, notamment $x = 0$, et souvent aussi $\lim_{x \to \infty} [x f(x)]$.

f) On peut aussi, dans le cas d'un pôle réel d'ordre élevé, utiliser une division suivant les puissances croissantes de $x - a = t$.

g) Enfin il est conseillé de tenir compte dans l'écriture de la décomposition, du fait, éventuel, que la fonction f est paire ou impaire (voir exemple $\dfrac{1}{x^4 + 1}$).

Intégration d'un élément simple de première espèce

Il s'agit de calculer $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, α entier $\geqslant 1$.

Deux cas se présentent :

$\alpha = 1$, $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \operatorname{Log} |x - a| + C$

$\alpha \geqslant 2$, $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \int (x-a)^{-\alpha}\, dx = \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C =$

$$- \frac{1}{(\alpha - 1)(x-a)^{\alpha-1}} + C$$

Il en résulte, d'après *a*) ci-dessus, que la primitive d'une fraction rationnelle sans partie entière ne possédant que des pôles réels simples (c'est-à-dire d'ordre 1) est une somme de logarithmes, qui peut d'ailleurs se ramener à un seul logarithme (ce qui est intéressant lorsque les coefficients sont rationnels).

Exemple.

Soit à calculer

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + x - 1}\,dx.$$

Les pôles sont $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, la décomposition en éléments simples s'écrit

$$\frac{x}{x^2 + x - 1} = \frac{A}{(x - a)} + \frac{B}{(x - b)}, \qquad \text{avec} \quad a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},\ b = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

On obtient

$$A = \lim_{x \to a} \frac{x\,(x - a)}{(x - a)\,(x - b)} = \frac{a}{a - b} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

de même

$$B = \frac{b}{b - a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

On peut aussi obtenir ces coefficients par la formule

$$A = \frac{R(a)}{Q'(a)} = \frac{a}{2a + 1}$$

On a donc

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + x - 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \int \frac{dx}{x + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}} + \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \int \frac{dx}{x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \operatorname{Log} \left| x + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right| + \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \operatorname{Log} \left| x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right| + C$$

Intégration d'un élément simple de seconde espèce

Il s'agit de calculer

$$F(x) = \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^\alpha}\,dx, \qquad \alpha \text{ entier} \geqslant 0,\ p^2 - 4q < 0.$$

Ce calcul peut s'effectuer en quatre étapes.

Première étape : on fait apparaître dans $Ax + B$ la dérivée de $x^2 + px + q$, en écrivant

$$Ax + B = \frac{A}{2}(2x + p) + B - \frac{pA}{2},$$

on obtient ainsi en posant $x^2 + px + q = u$, et $B - \frac{pA}{2} = \lambda$:

$$F(x) = \frac{A}{2}\int \frac{du}{u^\alpha} + \lambda \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^\alpha}$$

$\int \frac{du}{u^\alpha}$ est l'intégrale d'un élément simple de première espèce, et il reste à calculer $G(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^\alpha}$.

Deuxième étape : on décompose $x^2 + px + q$ en somme de deux carrés :

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = t^2 + k^2,$$

où $\quad t = x + \frac{p}{2}, \quad$ et $\quad k = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} > 0 \quad \left(\text{car } q - \frac{p^2}{4} > 0\right)$

d'où $G(x) = \int \frac{dt}{(t^2 + h^2)^\alpha} = \varphi(t)$.

Troisième étape : calcul de $\varphi(t)$:

Si $\alpha = 1$, $\varphi(t) = \frac{1}{k} \text{Arc tg} \frac{t}{k}$.

Si $\alpha \geqslant 2$, on pose $t = k \text{ tg } \theta$, $\theta = \text{Arc tg} \frac{t}{k}$, on obtient

$$\varphi(t) = k^{1-2\alpha} \int \frac{(1 + \text{tg}^2\,\theta)\,d\theta}{(1 + \text{tg}^2\,\theta)^\alpha} = k^{1-2\alpha} \int \cos^{2\alpha-2}\theta\, d\theta,$$

que l'on calcule par linéarisation et éventuellement changement de variable.

On revient à la variable t et on obtient pour $\varphi(t)$ une combinaison d'une fraction rationnelle et d'un arc tangente.

Quatrième étape : on revient à x dans $\varphi(t)$, on obtient $G(x)$ et on regroupe avec la partie de $F(x)$ déjà calculée.

Exemple.

Calculons

$$F(x) = \int \frac{x + 1}{(x^2 - 2x + 3)^2}\,dx$$

Faisons d'abord apparaître $2x - 2$, dérivée de $x^2 - 2x + 3$, au numérateur :

$$F(x) = \frac{1}{2}\int \frac{2x - 2 + 4}{(x^2 - 2x + 3)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x - 2)\,dx}{(x^2 - 2x + 3)^2} + 2\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 3)^2}$$

$u = (x^2 - 2x + 3)$ $du = 2x - 2\,dx$

$$= H(x) + G(x) + C$$

$H(x)$ est de la forme $\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2u}$, donc

$$H(x) = -\frac{1}{2(x^2 - 2x + 3)}$$

Dans $G(x)$, nous écrivons

$$x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + (\sqrt{2})^2 = t^2 + (\sqrt{2})^2, \qquad \text{avec } x - 1 = t$$

puis $t = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\theta$,

$$\theta = \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{t}{\sqrt{2}} = \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{x - 1}{\sqrt{2}}$$

Il en résulte

$$G(x) = 2\int \frac{dt}{(t^2 + 2)^2} = 2\int \frac{\sqrt{2}\,(1 + \mathrm{tg}^2\,\theta)\,d\theta}{4\,(1 + \mathrm{tg}^2\,\theta)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \cos^2\theta\,d\theta$$

$$G(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\int (1 + \cos 2\theta)\,d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}\theta + \frac{\sqrt{2}}{8}\sin 2\theta$$

Or si

$$\mathrm{tg}\,\theta = v = \frac{x - 1}{\sqrt{2}},\quad \sin 2\theta = \frac{2v}{1 + v^2} = \frac{\sqrt{2}\,(x - 1)}{1 + \dfrac{(x - 1)^2}{2}} = \frac{2\sqrt{2}\,(x - 1)}{x^2 - 2x + 3}.$$

Donc

$$G(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{x - 1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x - 1}{x^2 - 2x + 3}$$

En regroupant avec $H(x)$ et tenant compte d'une constante d'intégration (dont on peut se dispenser dans les calculs partiels), on obtient

$$F(x) = \frac{x - 2}{2(x^2 - 2x + 3)} + \frac{\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{x - 1}{\sqrt{2}} + C$$

On voit, en coordonnant les résultats de ces deux paragraphes, que l'intégration d'une fraction rationnelle conduit, dans le cas le plus général, à la somme d'une fraction rationnelle et d'un ou plusieurs logarithmes ou arcs tangentes de fractions rationnelles.

Exemples d'intégrations de fractions rationnelles

$$a)\ F(x) = \int \frac{x\,dx}{x^3 + 3x^2 + 7x + 5} = \int f(x)\,dx$$

Le pôle $x = -1$ est apparent, donc

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 5}$$

On peut calculer A, B, C soit par identification, soit, plus rapidement, comme suit :

$$\lim_{x \to -1} (x+1) f(x) = A = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to \infty} x f(x) = 0 = A + B, \qquad \text{d'où} \qquad B = \frac{1}{4}$$

$$f(0) = 0 = A + \frac{C}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad C = \frac{5}{4}$$

On a donc

$$F(x) = \frac{1}{4}\left(-\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{x+5}{x^2+2x+5}\right) = -\frac{1}{4}\operatorname{Log}|x+1| + \frac{1}{4}G(x);$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2+8}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(x^2+2x+5) + 4\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Log}(x^2+2x+5) + 2\operatorname{Arc\,tg}\frac{x+1}{2}$$

Après regroupement on obtient

$$F(x) = \frac{1}{8}\operatorname{Log}\frac{x^2+2x+5}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg}\frac{x+1}{2} + C$$

$$b)\ F(x) = \int \frac{dx}{x^4+1}.$$

Ici nous n'avons pas de pôle réel, on factorise $x^4 + 1$, sur $\mathbb{R}$, en écrivant

$$x^4 + 1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$$

D'où

$$f(x) = \frac{Ax + B}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}$$

On observe que f est paire :

$$f(-x) = \frac{-Ax + B}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{-Cx + D}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} = f(x)$$

et comme la décomposition est unique, on a $C = -A$ et $D = B$.

La substitution $x = 0$ donne

$$1 = B + D = 2B, \qquad \text{d'où} \qquad B = D = \frac{1}{2}$$

$x = \sqrt{2}$ donne

$$\frac{1}{5} = \frac{A\sqrt{2} + \frac{1}{2}}{5} + \left(-A\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right), \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad C = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ainsi

$$F(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\,dx - \int \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}\,dx\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}[g(x) - h(x)] + \lambda,$$

avec

$$g(x) = \frac{1}{2}\int \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\,dx + \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Log}(x^2 + x\sqrt{2} + 1) + \operatorname{Arc\,tg}(x\sqrt{2} + 1)$$

$$h(x) = \int \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}\,dx = g(-x)$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Log}(x^2 - x\sqrt{2} + 1) - \operatorname{Arc\,tg}(x\sqrt{2} - 1)$$

On obtient donc

$$F(x) = \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{Log}\frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{4}[\operatorname{Arc\,tg}(x\sqrt{2} + 1) - \operatorname{Arc\,tg}(x\sqrt{2} - 1)] + \lambda$$

c) $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^4 + 1)^2}$.

La décomposition en éléments simples est analogue à la précédente, mais avec 8 coefficients, se ramenant à 4 en tenant compte de la parité, leur calcul,

et celui des intégrales correspondantes, serait long. Il est plus simple d'utiliser une intégration par parties en écrivant

$$F(x) = \int \frac{x^4 + 1 - x^4}{(x^4 + 1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^4 + 1} - \int x \cdot \frac{x^3\,dx}{(x^4 + 1)^2},$$

compte tenu du calcul du paragraphe *b*), il suffit de calculer

$$\frac{1}{4}\int x \cdot \frac{4x^3\,dx}{(x^4 + 1)^2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x}{x^4 + 1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^4 + 1}$$

$\left(\text{en posant } x = u, \quad dv = \dfrac{4x^3\,dx}{(x^4 + 1)^2}\right)$.

Il en résulte

$$F(x) = \frac{x}{4(x^4 + 1)} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^4 + 1}$$

Cette méthode, classique, permet de ramener à $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n + 1}$ une intégrale de la forme $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^n + 1)^p}$, où n et p sont des entiers positifs.

d) $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{x\,dx}{(x + 1)^3 (x^2 + 1)}$.

La décomposition fait apparaître 5 coefficients indéterminés. Nous les obtiendrons ici à l'aide d'une division suivant les puissances croissantes de la variable auxiliaire $x + 1 = t$. La fraction devient

$$\varphi(t) = \frac{t - 1}{t^3 (t^2 - 2t + 2)}$$

En divisant $-1 + t$ par $2 - 2t + t^2$ suivant les puissances croissantes [1] à l'ordre 2, on obtient

$$-1 + t = (2 - 2t + t^2)\left(-\frac{1}{2} + \frac{t^2}{4}\right) + \frac{t^3}{2} - \frac{t^4}{4}.$$

D'où

$$\varphi(t) = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{t^2}{4}}{t^3} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{t}{4}}{t^2 - 2t + 2} = -\frac{1}{2t^3} + \frac{1}{4t} - \frac{1}{4} \cdot \frac{t - 2}{t^2 - 2t + 2}$$

$$= -\frac{1}{2(x + 1)^3} + \frac{1}{4(x + 1)} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x - 1}{x^2 + 1}$$

C'est bien la décomposition en éléments simples cherchée.

---

[1] Voir cours d'algèbre.

L'intégration est alors immédiate et donne

$$I = \left[\frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{4}\operatorname{Log}|x+1| - \frac{1}{8}\operatorname{Log}(x^2+1) + \frac{1}{4}\operatorname{Arc\,tg}\,x\right]_0^1$$

Soit $$I = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}\operatorname{Log} 2 - \frac{3}{16} \simeq 0{,}095.$$

Conclusion

Comme le montrent la théorie et les exemples précédents, qui n'ont pas l'ambition d'être exhaustifs quant aux méthodes pratiques de décomposition et d'intégration, l'intégration des fractions rationnelles demande une grande habitude si l'on veut éviter des calculs longs et fastidieux, voire inextricables. On aura intérêt, avant de se lancer dans l'application d'une méthode générale, à examiner avec soin si l'on se trouve dans un cas particulier : possibilité d'abaisser le degré par changement de variable ou intégration par parties, simplification du calcul des coefficients par des considérations de parité, etc.

Malgré ces difficultés pratiques, cette intégration présente un intérêt considérable du fait que de nombreuses intégrales, dont nous allons examiner quelques types classiques, se ramènent par des transformations simples, le plus souvent des changements de variables, à celles de fractions rationnelles.

3. PRIMITIVES DE FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES OU HYPERBOLIQUES

Nous envisageons ici des intégrales de la forme $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, ou $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$, où R est une fraction rationnelle.

Forme $\int \sin^p x \cos^q x\,dx$, ou $\int \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}^q x\,dx$, avec p et q entiers relatifs

A des nuances de signes près, les méthodes sont les mêmes pour ces deux formes d'intégrales, nous étudierons la première.

a) q impair : on prend pour variable $\sin x = u$, en écrivant

$$F(x) = \int \sin^p x \cdot \cos^{q-1} x \cdot \cos x\,dx = \varepsilon \int u^p (1-u^2)^{\frac{q-1}{2}}\,du$$

avec $\varepsilon = \pm 1$ suivant que $\cos x > 0$ ou $\cos x < 0$.

b) p impair : même principe, avec la variable $\cos x = u$.

c) p et q pairs $\geqslant 0$: on abaisse le degré en utilisant les formules

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

puis si nécessaire on recommence avec $\sin^2 2x$ et $\cos^2 2x$, ou on change de variable (exemples déjà vus).

d) p et q pairs, l'un au moins étant négatif : on prend pour variable $\operatorname{tg} x = t$; cette méthode est d'ailleurs aussi applicable lorsque p et q sont impairs.

Exemples.

- $$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^4 x} \cdot \cos x\,dx$$
$$= \int \frac{1 - u^2}{u^4}\,du \qquad (\text{avec } \sin x = u)$$
$$= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C$$

- $$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^4 x} = \int \frac{1}{\operatorname{sh}^4 x}\,d(\operatorname{th} x) = \int \left(\frac{1}{t^2} - 1\right)^2 dt, \quad (\text{avec } \operatorname{th} x = t)$$
$$= -\frac{1}{3t^3} + \frac{2}{t} + t + C$$
$$= -\frac{1}{3}\coth^3 x + 2\coth x + \operatorname{th} x + C.$$

Intégrales de Wallis

On appelle ainsi les intégrales $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$, où n est entier naturel. On a visiblement $I_n > 0$ et $J_n > 0$.

Le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ montre aisément que $I_n = J_n$. On calcule immédiatement $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$.

Pour n entier $\geqslant 2$, transformons I_n par une intégration par parties :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cdot \cos x\,dx$$
$$= \left[\cos^{n-1} x \cdot \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,(n-1)\cos^{n-2} x \sin x\,dx$$

La partie intégrée est nulle, il reste

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\,(1-\cos^2 x)\,dx = (n-1)\,(I_{n-2} - I_2),$$

d'où la relation de récurrence $nI_n = (n-1)\,I_{n-2}$, qui permet de ramener le calcul de I_n à I_0 si n est pair, à I_1 si n est impair.

Plus précisément distinguons ces deux cas :

a) n pair : $n = 2p$, p entier.

On écrit

$$\begin{aligned} 2\,I_2 &= I_0 \\ 4\,I_4 &= 3\,I_2 \\ 6\,I_6 &= 5\,I_4 \\ &\cdots\cdots \\ (2p-2)\,I_{2p-2} &= (2p-3)\,I_{2p-4} \\ 2p\,I_{2p} &= (2p-1)\,I_{2p-2} \end{aligned}$$

Par multiplication membre à membre, on obtient après simplification :

$$2.4.6\ldots(2p)\,I_{2p} = 1.3.5\ldots(2p-1)\,I_0$$

Or $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, donc

$$I_{2p} = \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots(2p)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

b) n impair : $n = 2p+1$, p entier.

La même méthode donne

$$I_{2p+1} = \frac{2.4.6\ldots(2p)}{1.3.5\ldots(2p-1)(2p+1)}$$

Nous retiendrons donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}$$

Les relations immédiates $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = 1$ montrent que $I_{2n} \sim I_{2n+1}$ quand $n \to +\infty$, et permettent d'établir la formule de Wallis :

$$\pi = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right]^2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{2^{4n}\,(n!)^4}{[(2n)!]^2}$$

La première des intégrales de Wallis est souvent utile dans des calculs d'intégrales multiples d'origine physique, moments d'inertie par exemple.

Cas général

Soit à calculer $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ ou $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$.

a) On essaie l'un des changements de variable $\sin x = u$, $\cos x = u$, $\operatorname{tg} x = u$ (ou $\operatorname{sh} x = u$...), à retenir s'ils n'introduisent pas de radicaux.

b) En cas d'échec, la méthode générale consiste à prendre pour variable $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ pour les fonctions trigonométriques, $\operatorname{th} \frac{x}{2} = t$ ou $e^x = u$ pour les fonctions hyperboliques. On est ainsi ramené à l'intégration d'une fraction rationnelle. Notons que $\int R(\sin x)\,dx$ se ramène, par le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - y$, à $-\int R(\cos y)\,dy$, plus commode (exemple ci-dessous).

Exemples.

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{(2 + \sin x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y\,dy}{(2 + \cos y)^2}$.

$\operatorname{tg} \frac{y}{2} = t$ donne

$$dt = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}\right) dy, \qquad dy = \frac{2\,dt}{1 + t^2}$$

Comme $\cos y = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, on voit que l'on aura une fonction paire de t, alors que $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$ dans la forme initiale aurait donné une fonction ni paire, ni impaire.

On aura donc

$$I = \int_0^1 \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)\left(2 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)^2} \frac{2\,dt}{1 + t^2} = \int_0^1 \frac{2(1 - t^2)}{(3 + t^2)^2}\,dt$$

Plutôt que de décomposer en éléments simples, ce qui donnerait

$$\frac{A}{3 + t^2} + \frac{B}{(3 + t^2)^2},$$

posons directement

$$t = \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \theta, \qquad \theta = \operatorname{Arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{3}},$$

on obtient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\,(1 - 3\,\mathrm{tg}^2\,\theta)\,.\,\sqrt{3}\,(1 + \mathrm{tg}^2\,\theta)\,\mathrm{d}\theta}{9\,(1 + \mathrm{tg}^2\,\theta)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2\theta - 3\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{3}}{9} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2\theta - 3 + 3\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9} [\sin 2\theta - \theta]_0^{\pi/6}, \quad \text{soit} \quad I = \frac{1}{3} - \frac{\pi\sqrt{3}}{27}$$

b) $F(x) = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^4 x}\,\mathrm{d}x.$

La variable $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t$ conduirait ici à de très longs calculs, mais on peut remarquer que

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{tg}^2\,x}{\mathrm{tg}^2\,x + \cos^2 x}\,.\,\mathrm{d}x,$$

d'où, en posant $\mathrm{tg}\,x = u$, $(1 + \mathrm{tg}^2\,x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2}$,

$$F(x) = \int \frac{u^2}{u^2 + \frac{1}{1 + u^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} = \int \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{u^4 + u^2 + 1}$$

$$= \int \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{(u^2 + u + 1)\,(u^2 - u + 1)}$$

intégrale dont le lecteur achèvera facilement le calcul.

c) $F(x) = \int \frac{\mathrm{ch}^2\,x}{1 + \mathrm{sh}\,x}\,\mathrm{d}x.$

Ici, nous poserons $e^x = u$, d'où $x = \mathrm{Log}\,u$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u}$, et on obtient

$$F(x) = \frac{1}{2} \int \frac{(u^2 + 1)}{u^2\,(u^2 + 2\,u - 1)}\,\mathrm{d}u$$

Là encore nous laissons au lecteur le soin d'achever le calcul.

4. PRIMITIVES DE FONCTIONS ALGÉBRIQUES NON RATIONNELLES

Nous envisageons ici une intégrale de la forme

$$F(x) = \int f\,[x, y(x)]\,\mathrm{d}x,$$

où f est une fonction rationnelle de x et y, et où y est un radical d'une fonction rationnelle de x.

Sauf cas particuliers $\left(\text{par exemple } \int \sqrt{x^3+1}\,.x^2\,dx\right)$, le calcul ne se ramène aux fonctions élémentaires que dans les cas suivants.

1° $y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{\alpha x+\beta}}$, n entier $\geqslant 2$; a, b, α, β réels.

On prend y pour variable, en effet x et par suite dx s'expriment rationnellement à l'aide de y et dy, et l'on est ramené à une intégration de fraction rationnelle.

Exemple.

$$F(x) = \int x \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$$

On pose

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = y, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{y^3+1}{y^3-1} = 1 + \frac{2}{y^3-1}, \quad dx = -\frac{6y^2\,dy}{(y^3-1)^2}$$

$$F(x) = \int \frac{6y^3(1+y^3)}{(1-y^3)^3}\,dy = 6\int \frac{y^3(y^3-1+2)}{(1-y^3)^3}\,dy$$

$$= 12\int \frac{y^3\,dy}{(1-y^3)^3} - 6\int \frac{y^3\,dy}{(1-y^3)^2}$$

dont on pourra achever le calcul en exprimant ces intégrales, après intégration par parties, à l'aide de $\displaystyle\int \frac{dy}{1-y^3}$ dont le calcul est simple (méthode vue p. 184).

2° $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$.

Ce cas est beaucoup plus fréquent, et d'ailleurs la forme du paragraphe précédent s'y ramène lorsque $n = 2$ en écrivant

$$\sqrt{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}} = \frac{\sqrt{(ax+b)(\alpha x+\beta)}}{|\alpha x+\beta|}$$

Nous mettrons le trinôme sous la forme dite « canonique » :

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

En posant, suivant le signe de Δ, $\pm \frac{\Delta}{4a^2} = k^2$, $k > 0$, et $x + \frac{b}{2a} = ku$, on se trouve ramené, suivant les signes de a et de Δ, à l'une des trois formes réduites suivantes :

- $a > 0, \quad \Delta < 0, \quad y = \sqrt{a}\,|k|\sqrt{u^2 + 1}$
- $a < 0, \quad \Delta > 0, \quad y = \sqrt{-a}\,|k|\sqrt{1 - u^2}$
- $a > 0, \quad \Delta > 0, \quad y = \sqrt{a}\,|k|\sqrt{u^2 - 1}$

Notons que le cas $a < 0$, $\Delta < 0$ ne se présente pas car alors y n'est jamais défini.

Autrement dit on est ramené à

$$\int g\,[u, \varphi(u)]\,du$$

où g est rationnelle et où $\varphi(u) = \sqrt{1 + u^2}$, ou $\sqrt{1 - u^2}$, ou $\sqrt{u^2 - 1}$.

Or, sur des exemples, nous avons déjà vu comment éliminer de tels radicaux :

- si $\varphi(u) = \sqrt{1 + u^2}$, on pose $u = \mathbf{sh}\ t$ (parfois $u = \operatorname{tg} \theta$)
- si $\varphi(u) = \sqrt{1 - u^2}$, on pose $u = \sin t$, $t = \operatorname{Arc\,sin} u$ (ou $u = \cos \varphi$, ou $u = \operatorname{th} \theta$)
- si $\varphi(u) = \sqrt{u^2 - 1}$, on pose $u = \varepsilon\ \mathbf{ch}\ t$, avec $\varepsilon = \pm 1$, du signe de u $\left(\text{ou } u = \frac{1}{\cos \theta}, \text{ ou } u = \coth \varphi\right)$.

Dans chaque cas on arrive à $\int R\,(\cos t, \sin t)\,dt$ ou $\int R\,(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)\,dt$, R étant rationnelle.

Exemples.

a) $F(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$.

Comme $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$, nous poserons

$$x + 1 = 2u,$$

d'où $$F(x) = \int \frac{du}{(2u - 1)\sqrt{u^2 + 1}},$$

puis $u = \operatorname{sh} t$ donne

$$F(x) = \int \frac{\operatorname{ch} t\,dt}{(2 \operatorname{sh} t - 1) \operatorname{ch} t} = \int \frac{dt}{e^t - e^{-t} - 1} = \int \frac{e^t\,dt}{e^{2t} - e^t - 1}$$

Enfin $e^t = v$ donne

$$F(x) = \int \frac{dv}{v^2 - v - 1},$$

intégrale où, plutôt que de décomposer en éléments simples, nous écrirons

$$v^2 - v - 1 = \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2, \qquad \text{d'où, avec} \qquad v - \frac{1}{2} = z,$$

$$F(x) = \int \frac{dz}{z^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{Log} \left| \frac{2z + \sqrt{5}}{2z - \sqrt{5}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{Log} \left| \frac{2v - 1 - \sqrt{5}}{2v - 1 + \sqrt{5}} \right| + C$$

Comme

$$v = e^{\operatorname{Arg\,sh} u} = e^{\operatorname{Log}(u + \sqrt{u^2+1})} = u + \sqrt{u^2 + 1} = \frac{1}{2}(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5})$$

nous obtenons

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{Log} \left| \frac{x - \sqrt{5} + \sqrt{x^2 + 2x + 5}}{x + \sqrt{5} + \sqrt{x^2 + 2x + 5}} \right| + C$$

b) $I = \int_{-2}^{1} \frac{\sqrt{2 - x - x^2}}{2 - x} dx.$

Observons que $[-2, 1]$ est le domaine de définition de la fonction à intégrer puisque $2 - x - x^2 = (x + 2)(1 - x)$.

En écrivant

$$2 - x - x^2 = \frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2,$$

on est conduit à poser successivement $x + \frac{1}{2} = \frac{3u}{2}$, puis $u = \sin t$, $t = \operatorname{Arc\,sin} u$ ce qui donne

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\frac{3}{2}\sqrt{1 - u^2}}{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}u} \cdot \frac{3}{2} du = \frac{9}{2} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 - u^2}}{5 - 3u} du = \frac{9}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{5 - 3 \sin t} dt$$

Un nouveau changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - \theta$ permet de se ramener à une fonction paire,

$$I = \frac{9}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 - 3 \cos \theta} d\theta,$$

intégrale où nous appliquons la méthode générale, en posant $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = z$.

Une difficulté apparente se présente, car lorsque $\theta \to \pi^-$, $z \to +\infty$. On tombe sur une « intégrale généralisée », dont le théorie sera étudiée dans le chapitre suivant,

$$I = 18 \int_0^{+\infty} \frac{z^2 \, dz}{(1 + z^2)^2 (4 z^2 + 1)} \qquad \text{(ceci après calcul)}$$

Cette intégrale, bien qu'*a priori* non définie, a une valeur finie puisqu'elle est la limite quand $\alpha \to \pi$ de $\frac{9}{2} \int_0^{\alpha} \frac{\sin^2 \theta}{5 - 3 \cos \theta} \, d\theta$, cette limite étant précisément I.

On calcule I par décomposition en éléments simples,

$$I = \int_0^{+\infty} \left[\frac{6}{(z^2 + 1)^2} + \frac{2}{z^2 + 1} - \frac{8}{4 z^2 + 1} \right] dz$$

Or
$$\int_0^{+\infty} \frac{dz}{z^2 + 1} = [\text{Arc tg } z]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dz}{4 z^2 + 1} = \frac{1}{2} [\text{Arc tg } (2 z)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4},$$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + 1)^2}$ existe, et, par $z = \text{tg } \varphi$, devient $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi}{4}$.

En définitive

$$I = \frac{6 \pi}{4} + \pi - 8 \frac{\pi}{4}, \qquad I = \frac{\pi}{2}$$

5. CALCUL NUMÉRIQUE APPROCHÉ D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE

Lorsque la primitive de $f(x)$ n'est pas calculable élémentairement, ou demanderait des calculs très longs, on est conduit à calculer $\int_a^b f(x) \, dx$ par une méthode approchée. On peut classer les méthodes d'intégration approchée en deux catégories :

- les méthodes fondées sur les séries, qui seront étudiées ultérieurement,
- les méthodes d'origine graphique.

Ce sont ces dernières que nous allons indiquer ici. Notons que dans bien des cas, grâce à l'emploi des calculatrices, ces méthodes fournissent une précision comparable à celle d'une formule exacte, mais où le calcul numérique final a une précision limitée par celle des machines ou des tables.

1. Méthode des rectangles.

Nous supposerons tout d'abord que f est monotone sur $[a, b]$, par exemple croissante (fig. 2), et nous partagerons l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles égaux $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, b]$, leur longueur commune étant alors $\dfrac{b-a}{n}$. Si nous posons $f(x_i) = y_i$, avec $a = x_0$, $b = x_n$, la fonction en escalier $\varphi(x)$ définie par

$$\varphi(x) = y_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}[\qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

minore $f(x)$. Elle est représentée par la succession des segments

$$AM_1, P_1M_2, \ldots, P_{n-1}M_n.$$

Donc si

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad I_1 = \int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad \text{on a } I_1 < I.$$

Or

$$I_1 = (x_1 - a)\,f(a) + (x_2 - x_1)\,f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})\,f(x_{n-1}) = \frac{b-a}{n}\left[\sum_0^{n-1} y_i\right]$$

C'est la somme des aires des rectangles hachurés.

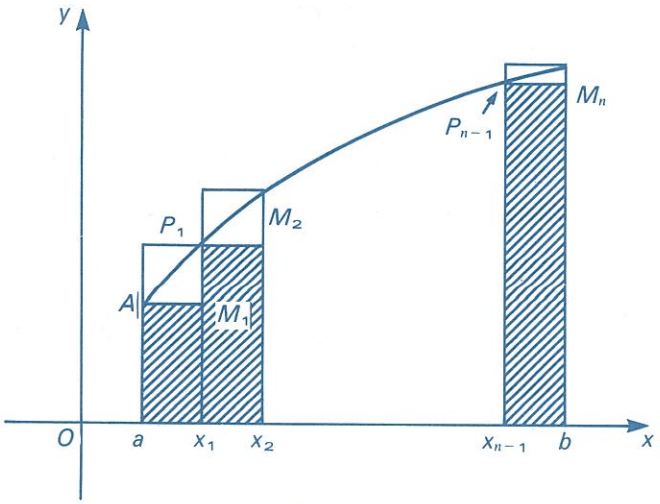


Figure 2.

De même la somme des aires des rectangles analogues obtenus en majorant f par ψ telle que

$$\psi(x) = y_{i+1}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}[, \quad \text{sera} \quad I_2 = \frac{b-a}{n}\left[\sum_1^n y_i > I.\right.$$

On obtient donc l'encadrement $I_1 < I < I_2$, avec

$$I_1 = \frac{b-a}{n}\sum_0^{n-1} y_i, \qquad I_2 = \frac{b-a}{n}\sum_1^n y_i.$$

Si nous prenons par exemple I_1 pour valeur approchée de I, nous commettons une erreur $\varepsilon = I - I_1 > 0$, et telle que $\varepsilon < I_2 - I_1 = \dfrac{b-a}{n}(y_n - y_0)$, soit

$$\varepsilon < \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)] \tag{1}$$

Lorsque f est décroissante sur $[a, b]$, on a $I_2 < I < I_1$, $\varepsilon = I_1 - I$ (si $I \simeq I_1$), et (1) subsiste si $f(b) - f(a)$ est pris en valeur absolue.

Lorsque f n'est pas monotone sur $[a, b]$, on a encore $I \simeq I_1$, mais le sens de l'erreur n'est plus connu; nous admettrons que la précision est encore de l'ordre de $\dfrac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$. Pour être plus précis on pourra partager $[a, b]$ en p intervalles sur chacun desquels f est monotone et calculer séparément les intégrales correspondantes.

2. Méthode des trapèzes.

Les notations restant celles du paragraphe précédent, et f étant monotone, par exemple croissante, on peut améliorer l'approximation en prenant $I \simeq S = \dfrac{I_1 + I_2}{2}$. Cela revient à assimiler f à une fonction affine sur $[x_i, x_{i+1}]$, c'est-à-dire à assimiler $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ à l'aire algébrique du trapèze $H_iH_{i+1}M_{i+1}M_i$ (fig. 3).

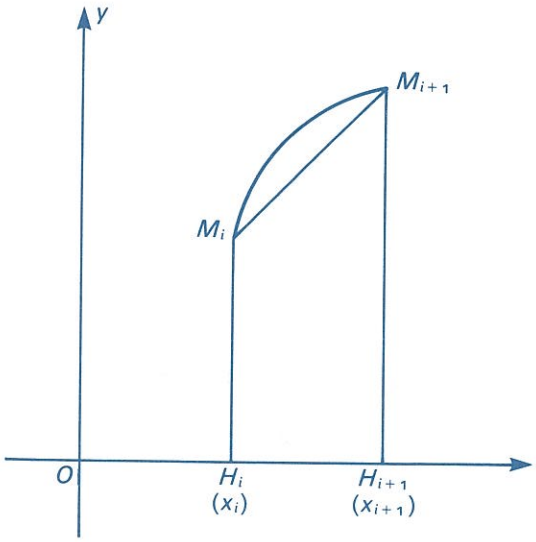


Figure 3.

En explicitant S, on obtient

$$S = \frac{b-a}{2n}\left(\sum_{0}^{n-1} y_i + \sum_{1}^{n} y_i\right) = \frac{b-a}{2n}\left(y_0 + \sum_{1}^{n-1} y_i + \sum_{1}^{n-1} y_i + y_n\right)$$

soit

$$\boldsymbol{I \simeq S = \frac{b-a}{2n}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{1}^{n-1} y_i\right)}$$

C'est la « formule des trapèzes ».

D'après le **1.**, il est évident que l'erreur ε est, en valeur absolue, inférieure à

$$\frac{I_2 - I_1}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad |\varepsilon| < \frac{b-a}{2n}[f(b) - f(a)].$$

Cependant on peut observer sur la figure 3 que si $f''(x) < 0$ sur $[a, b]$, les trapèzes envisagés ont une aire totale inférieure à I, donc $S < I$.

Par contre $S > I$ lorsque $f''(x) > 0$ sur $[a, b]$.

Enfin une étude plus approfondie montrerait que si k est un majorant de $|f''(x)|$ lorsque $x \in [a, b]$, on a $|I - S| < \dfrac{k(b-a)^3}{12n^2}$.

3. Formule des trois niveaux.

Nous allons montrer que si $f(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, $\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend que de a, de b et des valeurs de f en trois « niveaux » $x = a$, $x = \dfrac{a+b}{2}$, $x = b$ (Fig. 4).

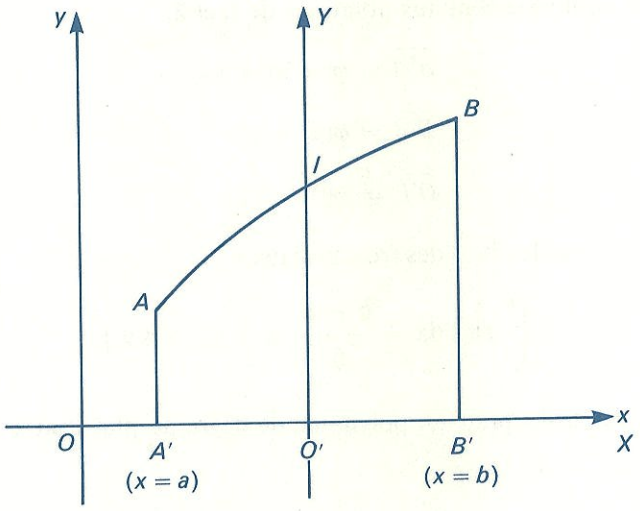


Figure 4.

Par une translation d'axes, prenons pour repère $XO'Y$, O' étant le milieu de $A'B'$. On pose donc

$$x = \frac{a+b}{2} + X, \quad y = Y \quad \text{et} \quad f(x) = \varphi(X) = AX^3 + BX^2 + CX + D,$$

d'où

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(X)\,dX, \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{b-a}{2}$$

Dans cette intégrale, seuls interviennent les termes de degré pair de φ, et on obtient

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} (BX^2 + D)\,dX = 2\int_0^{\alpha} (BX^2 + D)\,dX = \frac{2B\alpha^3}{3} + 2D\alpha$$

$$= 2\alpha\left(\frac{B\alpha^2}{3} + D\right) = (b-a)\left(\frac{B\alpha^2}{3} + D\right)$$

Or $\varphi(\alpha) + \varphi(-\alpha) = 2B\alpha^2 + 2D$, d'où

$$B\alpha^2 = \frac{\varphi(\alpha) + \varphi(-\alpha)}{3} - D, \qquad \text{avec} \qquad D = \varphi(0)$$

$$I = (b-a)\left[\frac{\varphi(\alpha) + \varphi(-\alpha)}{6} + \frac{2D}{3}\right] = \frac{b-a}{6}[\varphi(\alpha) + \varphi(-\alpha) + 4\varphi(0)]$$

Si l'on pose, conformément aux notations de **1.** et **2.**

$$\overline{A'A} = \varphi(-\alpha) = y_0,$$

$$\overline{B'B} = \varphi(\alpha) = y_2,$$

$$\overline{O'I} = \varphi(0) = y_1,$$

on obtient la formule dite « des trois niveaux »

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}(y_0 + y_2 + 4y_1)$$

valable, rappelons-le, pour un polynôme de degré au plus égal à 3.

4. Méthode de Simpson.

Pour une fonction quelconque, la formule des trois niveaux donne une valeur approchée de $I = \int_a^b f(x)\,dx$, l'approximation consistant à assimiler le graphe de f à une parabole d'équation $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ passant par les trois points A, B, I (condition qui permet de calculer les coefficients α, β, γ, mais en fait ce calcul est inutile).

La méthode de Simpson consiste à améliorer la précision de l'opération précédente en partageant $[a, b]$ en $2n$ intervalles égaux

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{2n-1}, b]$$

et en effectuant l'approximation des trois niveaux sur chacun des intervalles « doubles »

$$[a, x_2], [x_2, x_4], \ldots, [x_{2n-2}, b].$$

En posant encore $y_i = f(x_i)$, et $a = x_0$, $b = x_{2n}$, on obtient

$$I \simeq \frac{b-a}{6n}(y_0 + y_2 + 4y_1 + y_2 + y_4 + 4y_3 + \ldots + y_{2n-2} + y_{2n} + 4y_{2n-1})$$

$$I \simeq \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + y_{2n} + 2\sum_{1}^{n-1} y_{2i} + 4\sum_{0}^{n-1} y_{2i+1}\right) \qquad (1)$$

C'est la formule de Simpson.

Elle donne évidemment, comme celle des rectangles et celle des trapèzes, une approximation d'autant meilleure que n est plus grand. Signalons, à titre indicatif et sans démonstration, que si k est un majorant de $|f^{(4)}(x)|$ l'erreur ε dans cette approximation vérifie la relation

$$|\varepsilon| < \frac{k(b-a)^5}{2\,880\,n^4}$$

On voit que l'erreur décroît avec l'ordre de $\frac{1}{n}$ dans la méthode des rectangles, de $\frac{1}{n^2}$ dans la méthode des trapèzes et de $\frac{1}{n^4}$ dans celle de Simpson.

Cette dernière méthode est celle programmée ou programmable dans les calculatrices électroniques.

A titre d'exemple calculons ainsi $I = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\,dx$ (qui vaut exactement 1,5) en prenant $n = 2$ dans (1) :

$$I \simeq \frac{\pi}{18}\left(\sin 0 + \sin\frac{2\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{3} + 4\sin\frac{\pi}{6} + 4\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{18}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + 2 + 4\right) \simeq 1{,}5006$$

L'erreur est donc $\varepsilon \simeq 6.10^{-4}$. La théorie, avec ici $f^{(4)}(x) = \sin x$, donc $k = 1$, donne

$$|\varepsilon| < \frac{1}{2\,880 \times 16} \cdot \left(\frac{2\pi}{3}\right)^5 \simeq 8{,}7.10^{-4}.$$

Résumé du chapitre 9

- **Primitives fondamentales** (à une constante additive près).

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \qquad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \operatorname{Log} |x|$$

$$\int e^x \, dx = e^x, \qquad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\operatorname{Log} a} \quad (a \text{ positif} \neq 1)$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x, \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x, \qquad \int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{coth} x$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|, \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{Log} \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right|, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \operatorname{Arc\,tg} e^x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arc\,tg} x, \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arc\,tg} \frac{x}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left| \frac{1+x}{1-x} \right|,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc sin } x, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \text{Arc sh } x = \text{Log}\,(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{Arg ch } x, \quad x > 1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \text{Log}\,|x + \sqrt{x^2+k}\,|, \quad k \neq 0,$$

$$\int f(ax)\,dx = \frac{F(ax)}{a}, \quad a \neq 0, \quad \text{si} \quad \int f(x)\,dx = F(x)$$

- **Linéarité de l'intégration.**

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx, \quad (\lambda, \mu \text{ constants})$$

- **Intégration par parties.**

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int_a^b uv'\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b vu'\,dx$$

- **Changement de variable.**

Dans $\int f(x)\,dx$, on pose $x = \varphi(t)$ (φ monotone), on a

$$\int f(x)\,dx = \int f\,[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

où on remplace t par $\varphi^{-1}(x)$

Dans $\int_a^b f(x)\,dx$, on pose $x = \varphi(t)$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\,[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

• **Intégration des fonctions rationnelles.**

On décompose en partie entière et éléments simples de première et de seconde espèce.

Éléments simples de première espèce :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = -\frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} \quad \text{si} \quad \alpha \geqslant 2$$

$$= \operatorname{Log}|x-a| \quad \text{si} \quad \alpha = 1$$

Éléments simples de seconde espèce :

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^\alpha}\,dx, \qquad p^2 - 4q < 0$$

On écrit $Ax + B = A\left(x + \frac{p}{2}\right) + B - \frac{Ap}{2}$, on est ramené à

$$\int \frac{du}{u^\alpha}, \quad \text{connu, et} \quad \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\alpha},$$

que l'on ramène par changement de variable à $\int \frac{dt}{(t^2+k^2)^\alpha}$.

Si $\alpha = 1$, $\int \frac{dt}{t^2+k^2} = \frac{1}{k} \operatorname{Arc\,tg} \frac{t}{k}$.

Si $\alpha \geqslant 2$, on pose $\operatorname{Arc\,tg} \frac{t}{k} = \theta$, d'où à calculer $\int \cos^{2k-2}\theta\,d\theta$ que l'on obtient par linéarisation, et retour à x.

- **Intégration des fonctions rationnelles en cos x, sin x (ou en ch x, sh x).**

On peut toujours se ramener au cas d'une fonction rationnelle en posant $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ $\left(\text{ou } \operatorname{th}\frac{x}{2} = t, \text{ ou } e^x = u\right)$.

Mais il est souvent possible d'utiliser des changements de variable plus simples, ou de procéder par linéarisation (voir le cours détaillé).

- **Intégration de certaines fonctions irrationnelles.**

$\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right) dx$, f rationnelle, n entier $\geqslant 2$:

prendre comme variable : $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}$

$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$: par changement de variable, on est ramené à

$\int F(t, \sqrt{u})\,dt$, où u peut prendre l'une des trois formes $1+t^2, 1-t^2, t^2-1$,

et on élimine le radical par un nouveau changement de variable :

si $u = 1 + t^2$, $t = \operatorname{sh}\varphi$, ou $t = \operatorname{tg}\theta$
si $u = 1 - t^2$, $t = \sin\varphi$, ou $t = \cos\theta$, ou $t = \operatorname{th}\alpha$
si $u = t^2 - 1$, $t = \varepsilon \operatorname{ch}\varphi$ $(\varepsilon = \pm 1)$, ou $t = \frac{1}{\cos\theta}$.

- **Calcul numérique approché d'une intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx = I$.**

En posant

$x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $f(x_i) = y_i$; ε = erreur commise

Formule des rectangles :

$$I \simeq \frac{b-a}{n}\sum_0^{n-1} y_i, \quad |\varepsilon| < \frac{b-a}{n}|f(b) - f(a)|$$

Formule des trapèzes :

$$I \simeq \frac{b-a}{2n}\left(y_0 + y_n + 2\sum_1^{n-1} y_i\right),$$

$$|\varepsilon| < \frac{(b-a)^3}{12\,n^2}\cdot k, \qquad \text{si} \quad |f''(x)| \leqslant k$$

Formule de Simpson (partage en $2n$ intervalles égaux) :

$$I \simeq \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + y_{2n} + 2\sum_1^{n-1} y_{2i} + 4\sum_0^{n-1} y_{2i+1}\right)$$

$$|\varepsilon| < \frac{(b-a)^5}{2\,880\,n^4}\cdot k, \qquad \text{si} \quad |f^{(4)}(x)| \leqslant k.$$

EXERCICES

■ **1.** $I = \int \text{Arc sin } x\,dx$

Intégrons par parties.
Posons :

$$\text{Arc sin } x = u \qquad \text{d'où} \qquad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

et $dx = dv$ d'où $v = x$

$$I = uv - \int v\,du = x\,.\,\text{Arc sin } x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\,.\,\text{Arc sin } x + \int \frac{-2x\,dx}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\,.\,\text{Arc sin } x + \sqrt{1-x^2} + C$$

■ **2.** $I = \int \text{Arc tg } x\,dx$

Intégrons par parties.

Posons :

$$\text{Arc tg } x = u \qquad \text{d'où} \qquad du = \frac{dx}{1+x^2}$$

et $dx = dv$ d'où $v = x$

$$I = uv - \int v\,du = x \text{ Arc tg } x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$= x \,.\, \text{Arc tg } x - \frac{1}{2}\text{Log}(1+x^2) + C$$

■ 3. $$I = \int \frac{1+\cos x}{\sin x - 1}\,dx$$

Décomposons cette intégrale :

$$I = \int \frac{dx}{\sin x - 1} + \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x - 1}$$

La première intégrale s'écrit encore :

$$-\int \frac{dx}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1} = -\int \frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = -\text{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

La deuxième intégrale est simple puisque $\cos x\,dx = d(\sin x - 1)$, sa valeur est donc $\text{Log}\,|\sin x - 1|$ et

$$\int \frac{1+\cos x}{\sin x - 1}\,dx = \text{Log}\,|\sin x - 1| - \text{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + C.$$

■ 4. $$I = \int \frac{dx}{\text{tg}^3 x}$$

$$= \int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^3 x} = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x\,dx}{\sin^3 x}$$

$$= \int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x} - \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x}$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2 x} - \text{Log}\,|\sin x| + C$$

■ **5.** $$I = \int \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \cos x}\,dx$$

Le changement de variable indiqué est :

$$\cos x = t$$

Il permet d'obtenir une intégrale de fraction rationnelle simple

$$I = -\int \frac{dt}{t(1 + t)}$$

La décomposition

$$\frac{1}{t(1 + t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1 + t}$$

permet de déterminer les coefficients par identification :

$$A(1 + t) + Bt = 1, \quad \text{d'où} \quad A = 1 \quad \text{et} \quad B = -1$$

$$I = -\int \frac{dt}{1 + t} + \int \frac{dt}{t} = \operatorname{Log}\left|\frac{1 + t}{t}\right| + C$$

$$= \operatorname{Log}\left|\frac{1 + \cos x}{\cos x}\right| + C$$

■ **6.** $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x + a} - \sqrt{x - a}}$$

Multiplions numérateur et dénominateur de l'élément différentiel par la quantité conjuguée du dénominateur

$$I = \int \frac{\sqrt{x + a} + \sqrt{x - a}}{2a}\,dx = \frac{1}{2a}\left[\int \sqrt{x + a}\,dx + \int \sqrt{x - a}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{3a}\left[(x + a)^{\frac{3}{2}} + (x - a)^{\frac{3}{2}}\right] + C.$$

■ **7.** Calculer

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$$

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 = 4\left[1 + \left(\frac{x + 1}{2}\right)^2\right]$$

et

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2}$$

et puisque

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arc\,tg}\frac{u}{a}$$

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

■ **8.** Calculer

$$I = \int \frac{dx}{e^x + 2e^{-x}}$$

Multiplions numérateur et dénominateur de l'élément différentiel par e^x :

$$I = \int \frac{e^x\,dx}{2 + e^{2x}}$$

d'où

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{e^x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

■ **9.**

$$I = \int \frac{\operatorname{Log} x}{x(1 - \operatorname{Log}^2 x)}\,dx$$

Posons $\operatorname{Log} x = t$, il vient :

$$I = \int \frac{t\,dt}{1 - t^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{Log}|1 - t^2| + C$$

$$= \operatorname{Log}\frac{1}{\sqrt{|1 - (\operatorname{Log} x)^2|}} + C$$

■ **10.**

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x}$$

Posons $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$; pour $x = 0 \quad t = 0$ et pour $x = \pi, t = \infty$.

$$x = 2 \operatorname{Arc\,tg} t \qquad \text{soit} \qquad dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2}$$

D'où :

$$I = \int_0^\infty \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{2\,dt}{(1+t)^2}$$

$$= \left[\frac{-2}{1+t}\right]_0^\infty = 2$$

■ **11.**

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{th} x}$$

$$I = \int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$$

et en multipliant numérateur et dénominateur par $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$, il vient :

$$I = \int \frac{(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) \operatorname{ch} x\,dx}{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}$$

$$= \int \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2}\,dx - \frac{1}{2}\int \operatorname{sh} 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}(2x + \operatorname{sh} 2x - \operatorname{ch} 2x) + C$$

■ **12.** Calculer l'intégrale

$$I = \int \frac{dx}{5 \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x + 4}$$

Passons en exponentielles à l'aide des formules

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$I = \int \frac{dx}{4e^x + e^{-x} + 4}$$

Effectuons le changement de variable $e^x = u$ soit $e^x\,dx = du$, et multiplions haut et bas par e^x, de façon à faire apparaître du :

$$I = \int \frac{e^x\,dx}{4\,e^{2x} + 1 + 4\,e^x} = \int \frac{du}{4\,u^2 + 4\,u + 1}$$

$$= \int \frac{du}{(2\,u + 1)^2} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\,u + 1} + C$$

$$I = \frac{-1}{4\,e^x + 2} + C$$

■ **13.**

$$I = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x}$$

Posons :

$$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad \text{soit} \quad x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad \text{alors} \quad dx = \frac{4\,t\,dt}{(1-t^2)^2}$$

et

$$I = \int \frac{4\,t^2\,dt}{(1-t^2)(1+t^2)}$$

La décomposition de $\dfrac{4\,t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}$ conduit à :

$$I = \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{1-t} - 2\int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \text{Log}\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - 2\,\text{Arc tg}\,t + C$$

Et en remplaçant t par sa valeur, il vient :

$$I = \text{Log}\left|\frac{1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}\right| - 2\,\text{Arc tg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$$

■ **14.** Calculer l'intégrale $\int \sin^6 x \cos^4 x\,dx$.

Les puissances de sin x et cos x sont paires. Nous adopterons donc une méthode de linéarisation en passant au cosinus de l'arc $2x$.

$$I = \int (\sin^2 x)^3 (\cos^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^3 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$I = \frac{1}{32} \int [1 - \cos 2x - 2\cos^2 2x + 2\cos^3 2x + \cos^4 2x - \cos^5 2x] \, dx$$

$$I = \frac{x}{32} - \frac{1}{32}\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{16}\int \cos^3 2x \, dx - \frac{1}{32}\int \cos^5 2x \, dx -$$

$$- \frac{1}{16}\int \cos^2 2x \, dx + \frac{1}{32}\int \cos^4 2x \, dx.$$

Traitons différemment les puissances paires et impaires.

Puissances *impaires* :

$$a) \int \cos^3 2x \, dx = \int \cos^2 2x \cos 2x \, dx = \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x \, dx$$

$$= \int (1 - u^2) \frac{du}{2}$$

(en posant $\sin 2x = u$).

Donc

$$\int \cos^3 2x \, dx = \frac{1}{2}\left[u - \frac{u^3}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3}\right]$$

$$b) \int \cos^5 2x \, dx = \int [\cos^2 2x]^2 \cos 2x \, dx = \int [1 - \sin^2 x]^2 \cos 2x \, dx$$

$$= \int (1 - u^2)^2 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\left[u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin 2x - \frac{2}{3}\sin^3 2x + \frac{1}{5}\sin^5 2x\right].$$

Puissances *paires* :

$$a) \int \cos^2 2x \, dx = \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8}$$

$$b)\ \int \cos^4 2x\,dx = \int (\cos^2 2x)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int [1 + 2\cos 4x + \cos^2 4x]\,dx$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\frac{\sin 4x}{4} + \frac{1}{4}\int \cos^2 4x\,dx$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{\sin 4x}{8} + \frac{1}{8}\int (1 + \cos 8x)\,dx$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{\sin 4x}{8} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 8x}{64}.$$

Soit en réunissant tous les résultats

$$I = \frac{3x}{256} - \frac{\sin 4x}{256} + \frac{\sin^5 2x}{320} + \frac{\sin 8x}{2\,048} + C$$

■ **15.** Calculer l'intégrale

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}\,dx$$

La fonction à intégrer sera définie pour $x > 3$ ou $x < 2$

$$x^2 - 5x + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}[(2x-5)^2 - 1]$$

on prend :

$$2x - 5 = \varepsilon \operatorname{ch}\varphi \begin{cases} \varepsilon = +1 & \text{si } 2x - 5 > \quad 1 \Rightarrow x > 3 \\ \varepsilon = -1 & \text{si } 2x - 5 < -1 \Rightarrow x < 2 \end{cases}$$

et

$$\varphi = \operatorname{Arg\,ch}\left(\frac{2x-5}{\varepsilon}\right). \quad \text{Donc } \varphi \geqslant 0.$$

$$x = \frac{5 + \varepsilon \operatorname{ch}\varphi}{2} \qquad dx = \frac{\varepsilon}{2}\operatorname{sh}\varphi\,d\varphi$$

$$I = \int \frac{\frac{5+\varepsilon\operatorname{ch}\varphi}{2} + 2}{\sqrt{\frac{1}{4}(\operatorname{ch}^2\varphi - 1)}} \times \frac{\varepsilon}{2}\operatorname{sh}\varphi\,d\varphi = \int \frac{9 + \varepsilon\operatorname{ch}\varphi}{\operatorname{sh}\varphi} \times \frac{\varepsilon}{2}\operatorname{sh}\varphi\,d\varphi$$

car $\sqrt{\operatorname{ch}^2\varphi - 1} = |\operatorname{sh}\varphi| = \operatorname{sh}\varphi$ puisque $\varphi \geqslant 0$.

$$I = \frac{\varepsilon}{2}\int (9 + \varepsilon \operatorname{ch}\varphi)\,d\varphi = \frac{9\,\varepsilon\varphi}{2} + \frac{\operatorname{sh}\varphi}{2} + C \qquad (\varepsilon^2 = 1)$$

$$I = \frac{9\,\varepsilon}{2}\operatorname{Arg\,ch}\left(\frac{2x-5}{\varepsilon}\right) + \sqrt{x^2 - 5x + 6} + C$$

et donc l'intégrale prendra les deux formes :

si $x > 3$ $\quad I = \frac{9}{2}\operatorname{Arg\,ch}(2x - 5) + \sqrt{x^2 - 5x + 6} + C$

si $x < 2$ $\quad I = -\frac{9}{2}\operatorname{Arg\,ch}(5 - 2x) + \sqrt{x^2 - 5x + 6} + C$

16. Calculer l'intégrale

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + x + 2}}$$

Mettons le trinôme $x^2 + x + 2$ sous la forme canonique :

$$x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

ou

$$x^2 + x + 2 = \frac{7}{4}\left[\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)^2 + 1\right]$$

Nous voyons donc qu'en posant :

$$\frac{2x + 1}{\sqrt{7}} = \operatorname{sh}\varphi$$

nous nous ramènerons à une fraction rationnelle des lignes hyperboliques de φ.

En effet :

$$2\,dx = \sqrt{7}\operatorname{ch}\varphi\,d\varphi$$

et

$$x = \frac{\sqrt{7}\operatorname{sh}\varphi - 1}{2}$$

$$I = \int \frac{\frac{\sqrt{7}\operatorname{sh}\varphi - 1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}(\operatorname{sh}^2\varphi + 1)}}\,\frac{\sqrt{7}}{2}\operatorname{ch}\varphi\,d\varphi$$

$$I = \int \frac{\frac{\sqrt{7}\,\mathrm{sh}\,\varphi - 1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}\,|\,\mathrm{ch}\,\varphi\,|} \frac{\sqrt{7}}{2}\,\mathrm{ch}\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

et comme $\mathrm{ch}\,\varphi = |\,\mathrm{ch}\,\varphi\,| \quad \forall\,\varphi$

$$I = \int \frac{\sqrt{7}\,\mathrm{sh}\,\varphi - 1}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\sqrt{7}}{2}\,\mathrm{ch}\,\varphi - \frac{\varphi}{2} + C$$

$$I = \sqrt{x^2 + x + 2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Arg\,sh}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C$$

■ **17.** Calculer l'intégrale

$$I = \int x\sqrt{-x^2 + 3x - 2}\,\mathrm{d}x$$

L'expression sous le radical n'est positive ou nulle que pour $1 \leqslant x \leqslant 2$. En mettant sous forme canonique :

$$-x^2 + 3x - 2 = \frac{1}{4}[1 - (2x-3)^2]$$

On posera donc :

$$2x - 3 = \sin\varphi$$

ou mieux :

$$\varphi = \mathrm{Arc\,sin}\,(2x-3)$$

ce qui suppose

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Nous aurons :

$$2\,\mathrm{d}x = \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \qquad \text{et} \qquad x = \frac{\sin\varphi + 3}{2}$$

$$I = \int \frac{\sin\varphi + 3}{2}\sqrt{\frac{1}{4}(1 - \sin^2\varphi)}\,.\,\frac{\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{2}$$

$$I = \frac{1}{8}\int (\sin\varphi + 3)\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

car

$$\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = |\cos\varphi| = \cos\varphi \qquad \text{puisque} \qquad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$I = \frac{1}{8}\int \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi + \frac{3}{8}\int \cos^2\varphi \, d\varphi$$

$$I = -\frac{1}{24}\cos^3\varphi + \frac{3}{8}\int \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi$$

$$= -\frac{1}{24}\cos^3\varphi + \frac{3}{32}\sin 2\varphi + \frac{3}{16}\varphi + C$$

comme $\frac{1}{2}\cos\varphi = \sqrt{-x^2+3x-2}$ et $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$, on trouve en définitive :

$$I = -\frac{1}{3}(-x^2+3x-2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{16}\operatorname{Arc}\sin(2x-3) +$$

$$+\frac{3}{8}(2x-3)\sqrt{-x^2+3x-2} + C$$

ou en mettant $\sqrt{-x^2+3x-2}$ en facteur :

$$I = \frac{1}{24}[8x^2-6x-11]\sqrt{-x^2+3x-2} + \frac{3}{16}\operatorname{Arc}\sin(2x-3) + C$$

18. $$I = \int \frac{dx}{x(1+x^2)^2}$$

Posons $x^2 = u$. L'intégrale s'écrit :

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u(1+u)^2}$$

Décomposons la fraction rationnelle $\frac{1}{u(1+u)^2}$:

$$\frac{1}{u(1+u)^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1+u} + \frac{C}{(1+u)^2}$$

En multipliant les 2 membres par u et en faisant $u = 0$, nous obtenons $A = 1$.

En multipliant les deux membres par $(1+u)^2$ et pour $u = -1$, il vient $C = -1$.

Enfin en donnant à u une valeur particulière quelconque, $+1$ par exemple l'identification donne :

$$\frac{1}{4} = 1 + \frac{B}{2} - \frac{1}{4} \qquad \text{soit} \qquad B = -1$$

d'où :

$$I = \frac{1}{2}\left[\int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{1+u} - \int \frac{du}{(1+u)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\text{Log}\,|u| - \text{Log}\,|1+u| + \frac{1}{1+u}\right] + C$$

$$I = \text{Log}\,\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2} + C$$

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

[1] $\int \sin^5 x \cos^3 x\, dx$ — *R.* : $\frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + C$

[2] $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}$ — *R.* : $\frac{1}{2}\,\text{Arc tg}\,(2\,\text{tg}\,x) + C$

[3] $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ — *R.* : $\frac{1}{2}\left[\text{Log}\left|\text{tg}\,\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right] + C$

[4] $\int \frac{4x\,dx}{\sqrt{9+4x^4}}$ — *R.* : $\text{Log}\,(2x^2 + \sqrt{9+4x^4}) + C$

[5] $\int \text{tg}^3 x\, dx$ — *R.* : $\frac{1}{2\cos^2 x} + \text{Log}\,|\cos x| + C$

[6] $\int (\text{Log}\,x)^2\, dx$ — *R.* : $x\,(\text{Log}\,x)^2 - 2x\,\text{Log}\,x + 2x + C$

[7] $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x-x^2}}$ — *R.* : $\text{Arc sin}\,\frac{x-2}{\sqrt{5}} + C$

[8] $\int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ — *R.* : $\text{Arc sin}\,\frac{x+1}{2} - 2\sqrt{3-2x-x^2} + C$

[9] $\int \sqrt{e^x - 1}\, dx$ — *R.* : $2\,[\sqrt{e^x-1} - \text{Arc tg}\,\sqrt{e^x-1}] + C$

[10] $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\, dx$ — *R.* : $-\,\text{Arc sin}\,x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$

[11] $\int \sqrt{\frac{2-x}{x}}\, dx$ — *R.* : $\sqrt{x\,(2-x)} + 2\,\text{Arc sin}\,\sqrt{\frac{x}{2}} + C$

[12] $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$ — *R.* : $\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + C$

[13] $\int \frac{3x + 13}{(5x - 1)(7x + 2)}\,dx$

$R. : \frac{4}{5}\operatorname{Log}|5x - 1| - \frac{5}{7}\operatorname{Log}|7x + 2| + C$

[14] $\int \frac{dx}{1 + x^4}$

$R. : \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{Log}\frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} + C$

[15] $\int \frac{14x + 5}{7x^2 + 4x + 9}\,dx$

$R. : \operatorname{Log}(7x^2 + 4x + 9) + \frac{1}{\sqrt{59}}\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{7x + 2}{\sqrt{59}}\right) + C$

[16] $\int \frac{\sqrt{x + 4}}{x - 1}\,dx$

$R. : 2\sqrt{x+4} - \sqrt{5}\operatorname{Log}\left|\frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{5}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{5}}\right| + C$

[17] $\int \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}\,dx$

$R. : \operatorname{Log}\left|\frac{1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{1 - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\right| + \varepsilon\sqrt{x^2 - 1} + C$

($\varepsilon = +1$ si $x > 1$

$\varepsilon = -1$ si $x < -1$)

[18] $\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}}$

$R. : \frac{3}{2}\operatorname{Log}(1 + x^{\frac{2}{3}}) + C$

[19] $\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 4x}\,dx$

$R. : \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left(\frac{\sqrt{2}\operatorname{ch} x + 1}{\sqrt{2}\operatorname{ch} x - 1}\right) + C$

[20] $\int \frac{dx}{(x^3 - 1)^2}$

$R. : -\frac{1}{9(x - 1)} + \operatorname{Log}\frac{(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{9}}}{(x - 1)^{\frac{2}{9}}} + \frac{2\sqrt{2}}{9}\operatorname{Arc\,tg}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9}\frac{x - 1}{x^2 + x + 1} + C$

[21] $\int \frac{x\,dx}{(x^4 - 3x^2 + 2)}$

$R. : \operatorname{Log}\sqrt{\left|\frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}\right|} + C$

[22] $\int \frac{x^7\,dx}{(x^4 - 2)^2}$

$R. : -\frac{1}{2(x^4 - 2)} + \frac{1}{4}\operatorname{Log}|x^4 - 2| + C$

[23] $\int \frac{dx}{(1 - x)\sqrt{1 - x^2}}$

$R. : \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} + C$

[24]	$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$	$R. : \frac{1}{2(a^2-b^2)} \operatorname{Log}\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right) + C$
[25]	$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$	$R. : \frac{1}{8}\frac{x+1}{x^2+2x+5} + \frac{1}{16} \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$
[26]	$\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2 x}}$	$R. : \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2 x}-1}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2 x}+1} + C$

[27] Établir la formule de récurrence permettant le calcul de $I_n = \int x^n e^x\,dx$ et en déduire la valeur de I_n.

Réponse.

$I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$

$= e^x [x^n - nx^{n-1} + \ldots + (-1)^p n(n-1)\ldots(n-p+1)x^{n-p} + \ldots + (-1)^n n!] + C$

[28]	$\int_0^1 \sqrt{9-4x^2}\,dx$	$R. : \frac{9}{4} \operatorname{Arc\,sin}\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{2}$
[29]	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx$	$R. : \pi - 2$
[30]	$\int_0^1 (x^3 - 2x + 5) e^{-\frac{x}{2}}\,dx$	$R. : 98 - \frac{156}{\sqrt{e}}$
[31]	$\int_0^1 x^2 e^x\,dx$	$R. : e - 2$
[32]	$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$	$R. : \frac{\pi}{16}$
[33]	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$	$R. : \frac{1}{\sqrt{2}}$
[34]	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{3\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}$	$R. : \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$
[35]	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^4 \theta\,d\theta$	$R. : \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$
[36]	$\int \sin^{n-1} x \sin(n+1)x\,dx$	$R. : \frac{1}{n} \sin^n x \sin nx$

[37] $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}\, dx$ | *R.* : 0

[38] Établir la formule de récurrence permettant le calcul de $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^n x}$ à partir de I_0 et I_1.

Réponse. – $I_n = \dfrac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \dfrac{n-2}{n-1} \cdot I_{n-2}$ avec $n \geqslant 2$

$$I_0 = x, \qquad I_1 = \operatorname{Log} \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C$$

CHAPITRE 10

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

1. INTRODUCTION ET DÉFINITIONS

Position du problème

Nous n'avons envisagé jusqu'ici que des intégrales du type $\int_a^b f(x)\,dx$, où f est définie sur $[a, b]$, sauf peut-être en un nombre fini de points où f admet des limites finies à droite et à gauche, ce qui ne pose pas de problème pratique, par exemple :

$$\int_0^3 \text{Arc tg}\left(\frac{1}{x-1}\right)dx = \int_0^{1-} \text{Arc tg}\left(\frac{1}{x-1}\right)dx + \int_{1+}^3 \text{Arc tg}\left(\frac{1}{x-1}\right)dx$$

Nous aborderons ici le problème suivant : peut-on dans certaines conditions, définir des intégrales de l'une des deux formes :

a) $\int_a^b f(x)\,dx$, où f est définie sur $[a, b[$, et $f(x) \underset{x \to b^-}{\to} +\infty$.

b) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, où f est définie sur $[a, +\infty[$.

A ces deux cas « types » se ramènent aisément ceux d'intégrales $\int_a^b f(x)\,dx$ où f n'est pas bornée en a, ou n'est bornée ni en a ni en b; et ceux d'intégrales $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Il suffit alors de poser $x = -t$, ou $f(x) = -g(x)$, ou de décomposer en deux intégrales. De telles intégrales sont dites « généralisées » ou « impropres ».

Définitions

a) Nous dirons que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$, où f est définie sur $[a, b[$ et $f(x) \underset{x \to b^-}{\to} +\infty$, « a un sens », ou « est convergente », si la fonction

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx,$$

définie sur $[a, b[$, admet une limite finie I lorsque $t \to b^-$. On écrit alors

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dans le cas contraire, nous dirons que $\int_a^b f(x)\,dx$ « n'a pas de sens » ou « est divergente ».

Notons que si

$$c \in [a, b[, \qquad \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_c^b f(x)\,dx$$

sont de même nature (toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes).

b) De même $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ a un sens, ou est convergente, si

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

admet une limite finie J lorsque $t \to +\infty$. On écrit alors

$$J = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ n'a pas de sens, ou est divergente.

De plus si $c \geqslant a$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ sont de même nature.

Cas où l'étude est élémentaire

Pour l'un comme pour l'autre des types d'intégrales ci-dessus (*a* et *b*), F est évidemment une primitive de f. Si F est connue ou calculable rapidement, l'examen de la convergence et le calcul éventuel de I (ou J) sont immé-

diats : il s'agit simplement de voir si, en b ou en $+\infty$, une primitive de f admet une limite finie.

Exemples.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, du type (a) avec $b = 1$, est convergente, car

$$\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = F(t) = \operatorname{Arc\,sin} t \underset{(t\to 1)}{\to} \frac{\pi}{2}.$$

On a donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$.

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$, du même type, est divergente car

$$F(t) = -\operatorname{Log}(1-t) \underset{t\to 1}{\to} +\infty.$$

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$, du type (b), est convergente, car

$$\int_0^t \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{Arc\,tg} t \underset{t\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{2}.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$.

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x}\,dx$, du même type, sont divergentes.

Il va de soi également que si on arrive à une intégrale généralisée par un changement de variable légitime dans une intégrale « propre », cette intégrale généralisée est forcément convergente. Par exemple

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$$

est définie, et par le changement de variable classique $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, devient

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2\,dt}{3+t^2}$$

qui converge forcément et vaut

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

L'étude qui va suivre (paragraphes 2 et 3) concerne des fonctions dont les primitives sont soit longues, soit impossibles, à calculer par les procédés élémentaires. Elle utilise essentiellement le théorème suivant.

Théorème préliminaire

Nous admettrons sans démonstration la propriété suivante (d'ailleurs « évidente » intuitivement) : si une fonction f est définie, continue, croissante, majorée sur $[a, b[$ (avec éventuellement $b = +\infty$), elle admet une limite finie l lorsque $x \to b$. Cette limite l est évidemment le plus petit majorant de f, c'est-à-dire le plus petit nombre A tel que,

$$\forall x \in [a, b[,\ f(x) < A.$$

Interprétation graphique :

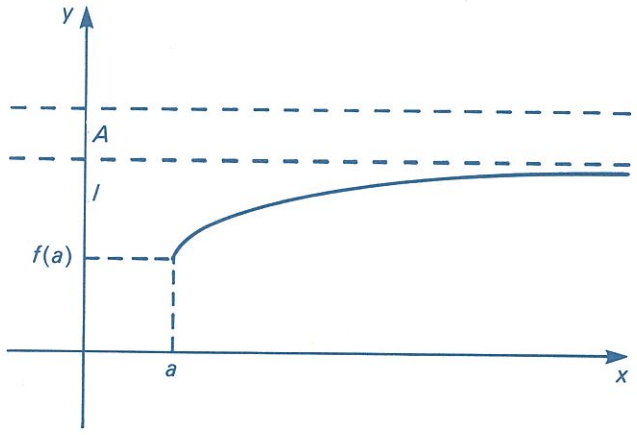


Figure 1.

Notons encore que si f est définie, continue, croissante, non majorée sur $[a, b[$, $f(x) \underset{x \to b}{\to} +\infty$.

2. INTÉGRALES DU TYPE $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x) \underset{x \to b^-}{\to} +\infty$

Étude de la convergence par comparaison

Supposons $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, f et g étant intégrables sur $[a, t]$, $\forall t \in [a, b[$. on a alors

$$0 \leqslant \int_a^t f(x)\,dx \leqslant \int_a^t g(x)\,dx.$$

Ces deux fonctions $F(t)$ et $G(t)$ sont croissantes car $F'(t) = f(t) \geqslant 0$ et $G'(t) = g(t) \geqslant 0$.

a) Si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge et vaut J, J est un majorant de $G(t)$, donc de $F(t)$, et d'après le théorème préliminaire, $F(t)$ admet une limite I lorsque $t \to b^-$, donc $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

b) Si $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, $F(t)$ n'est pas majorée, donc tend vers $+\infty$ lorsque $t \to b$, il en est de même de $G(t)$ qui est $\geqslant F(t)$, donc $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge.

En résumé,

si $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, $\quad$ **$\int_a^b g(x)\,dx$ convergente $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ convergente**

$\int_a^b f(x)\,dx$ divergente $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ divergente

Remarque.

Si $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ seulement sur $[c, b[$, $a \leqslant c < b$, les résultats restent valables.

Étude de la convergence par équivalence

Supposons f et g définies sur $[a, b[$, intégrables sur $[a, t]$ $\forall\, t \in [a, b[$, et $f(x) \underset{x \to b^-}{\sim} g(x)$, avec $g(x) \underset{x \to b^-}{\to} +\infty$. Alors il existe $c \in [a, b[$ tel que

$$x \geqslant c \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2} f(x) < g(x) < \frac{3}{2} f(x), \ f(x) > 0$$

Si $\int_a^b f(x)\,dx$ converge, $\quad \int_a^b \frac{3}{2} f(x)\,dx$ converge et $\int_a^b g(x)\,dx$ converge aussi.

Si $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, $\quad \int_a^b \frac{1}{2} f(x)\,dx$ diverge et $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge aussi.

En conclusion, **si deux fonctions sont, lorsque $x \to b^-$, des infiniment grands équivalents, et sont intégrables sur $[a, t[$ $\forall\, t \in [a, b[$, les intégrales $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_a^b g(x)$ sont « de même nature »** (toutes deux convergentes, ou toutes deux divergentes.

Étude de l'intégrale $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, α réel donné

Soit

$$F(t) = \int_a^t \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \int_a^t (b-x)^{-\alpha}\,dx, \qquad t \in [a, b[$$

a) Si $\alpha \neq 1$,

$$F(t) = \left[-\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_a^t = \frac{1}{\alpha - 1}\left[(b-t)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}\right]$$

Si $\alpha < 1$,

$$(b-t)^{1-\alpha} \underset{t \to b^-}{\to} 0, \qquad F(t) \to \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Si $\alpha > 1$,

$$(b-t)^{1-\alpha} \to +\infty, \qquad F(t) \to +\infty$$

b) Si $\alpha = 1$,

$$F(t) = [-\operatorname{Log}(b-x)]_a^b = \operatorname{Log}\frac{b-a}{b-t} \underset{t \to b^-}{\to} +\infty$$

Ainsi l'intégrale $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ **est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.**

Remarquons que si $\alpha \leqslant 0$, il ne s'agit pas d'une intégrale généralisée, mais les résultats précédents restent valables.

Règle de l'ordre. Règle de Riemann

En appliquant à $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$ et à une autre fonction $f(x)$ les méthodes de comparaison par inégalité ou par équivalence (1. et 2.), on arrive immédiatement aux deux règles suivantes :

a) Si f est intégrable sur $[a, t]$, $\forall\, t \in [a, b[$, et si $f(x) \underset{x \to b^-}{\sim} \frac{k}{(b-x)^\alpha}$, $k \neq 0$, c'est-à-dire **si $f(x)$ est d'ordre α par rapport à l'infiniment grand $\frac{1}{b-x}$, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente lorsque $\alpha < 1$, divergente lorsque $\alpha \geqslant 1$.**

Exemples.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$? Posons $x = \frac{\pi}{2} - t, t \to 0^+$,

$$\frac{1}{\sqrt{\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{\sin t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \alpha = \frac{1}{2} < 1$$

Cette intégrale est convergente.

$\int_1^2 \frac{dx}{\operatorname{Log} x}$? Posons $x = 1 + t, t \to 0^+$,

$$\operatorname{Log} x = \operatorname{Log}(1 + t) \sim t, \frac{1}{\operatorname{Log} x} \sim \frac{1}{x - 1}, \qquad \alpha = 1.$$

L'intégrale est divergente.

b) Règle (ou critère) de Riemann.

Supposons toujours f intégrable sur $[a, t]$ $\forall\, t \in [a, b[$, et considérons le produit $(b - x)^\alpha f(x)$ quand $x \to b$.

(1) S'il existe $\alpha < 1$ et $k > 0$ tels que $0 \leqslant (b - x)^\alpha f(x) \leqslant k$, $x \to b$, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ **est convergente.**

Il en est ainsi en particulier lorsque $\lim_{x \to b} (b - x)^\alpha f(x) = 0^+$, $\alpha < 1$.

Par exemple $\int_0^{\frac{1}{2}} |\operatorname{Log} x|^\beta\, dx$ converge $\forall\, \beta$ réel, car $x^{\frac{1}{2}} |\operatorname{Log} x|^\beta \underset{x \to 0^+}{\to} 0$.

(2) S'il existe $\alpha \geqslant 1$ et $k > 0$ tels que $(b - x)^\alpha f(x) \geqslant k$, $x \to b$, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ **est divergente.**

Il en est ainsi en particulier lorsque $(b - x)^\alpha f(x) \underset{x \to b}{\to} + \infty$, $\alpha \geqslant 1$. Par exemple $\int_0^1 e^{\frac{1}{x}}\, dx$ diverge, car si $\frac{1}{x} = t \to + \infty$, $\frac{e^t}{t} = x e^{\frac{1}{x}} \to + \infty$.

3. INTÉGRALES DU TYPE $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

Nous adopterons le même plan et établirons, ou admettrons (car les démonstrations peuvent être calquées, à quelques termes près, sur celles du paragraphe 1), les résultats suivants pour des fonctions positives sur $[a, + \infty[$, cas auquel on peut toujours se ramener si f garde un signe constant pour x suffisamment grand. Le cas de fonctions de signe variable sur $[t, + \infty[$, $\forall\, t > 0$,

sera étudié dans un dernier paragraphe. On suppose évidemment f intégrable sur $[a, t]\ \forall\ t \geqslant a$.

Étude par comparaison

Soit $\mathbf{0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),\ \forall\ x \geqslant a}$:

a) Si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ **converge,** $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **converge.**

Exemple.

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{e},$$

$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge.

b) Si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **diverge,** $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ **diverge.**

Étude par équivalence

Supposons $f(x)$ **et** $g(x)$ **positives et équivalentes lorsque** $x \to +\infty$. Les deux intégrales $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **et** $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ **sont alors de même nature.**

Étude de $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $a > 0$, α **réel donné**

$$F(t) = \int_a^t x^{-\alpha}\,dx = [\operatorname{Log} x]_a^t = \operatorname{Log}\frac{t}{a}, \qquad \text{si} \qquad \alpha = 1.$$

$$= \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^t = \frac{t^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \qquad \text{si} \qquad \alpha \neq 1.$$

L'étude, immédiate, des limites lorsque $t \to +\infty$, permet de conclure que $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, **où** $a > 0$, **est convergente si et seulement si** $\alpha > 1$.

Règle de l'ordre. Règle de Riemann

a) Si, quand $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{k}{x^\alpha}$, $k \neq 0$, c'est-à-dire si $f(x)$ **est d'ordre** α **par rapport à l'infiniment petit** $\frac{1}{x}$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **est convergente lorsque**

$\alpha > 1$, divergente lorsque $\alpha \leqslant 1$. Exemple : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^\beta}$ converge si $\beta > \frac{1}{2}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$ diverge.

b) • S'il existe $\alpha > 1$ et $k > 0$ tels que $0 \leqslant x^\alpha f(x) \leqslant k$, $x \to +\infty$, **l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente.**

En particulier si $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = 0^+$, $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Par exemple $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^\beta}\,dx$ converge $\forall\ \beta > 0$, car $x^2 e^{-x^\beta} \to 0$.

• **S'il existe $\alpha \leqslant 1$ et $k > 0$, tels que $x^\alpha f(x) \geqslant k$, $x \to +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est divergente.**

En particulier si $x^\alpha f(x) \to +\infty$, quand $x \to +\infty$, avec $\alpha \leqslant 1$,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

diverge.

Par exemple $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{Log} x}$ diverge car $\displaystyle\frac{x}{\operatorname{Log} x} \to +\infty$.

Cas d'une fonction de signe variable sur $[t, +\infty[$, $\forall\ t$

Ce cas se rencontre assez souvent par l'intermédiaire de fonctions trigonométriques, par exemple $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ (voir exercices). Nous essaierons de nous ramener aux cas précédents en utilisant la fonction $\varphi(x) = |f(x)|$ qui est positive.

a) Supposons $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ convergente. Nous allons voir s'il en est de même de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Pour cela introduisons les deux fonctions auxiliaires :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) = \varphi(x), & \text{si} \quad f(x) \geqslant 0 \\ 0, & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad f(x) \geqslant 0 \\ -f(x) = \varphi(x), & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

De la sorte nous aurons $f(x) = g(x) - h(x), \forall\, x \geqslant a$.

Nous aurons aussi $0 \leqslant g(x) \leqslant \varphi(x)$, $0 \leqslant h(x) \leqslant \varphi(x)$. Donc $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ et $\int_a^{+\infty} h(x)\,dx$ sont convergentes, et

$$\int_a^t [g(x) - h(x)]\,dx = \int_a^t g(x)\,dx - \int_a^t h(x)\,dx$$

admet une limite finie pour $t \to +\infty$, autrement dit $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

En conclusion, $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ **convergente** $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **convergente.**

Nous dirons alors que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est absolument convergente (convergente « en valeur absolue »). La convergence absolue est une condition suffisante, mais non nécessaire, de convergence. En effet :

b) Supposons $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ divergente. Il peut alors arriver que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ soit divergente, ou qu'elle soit convergente. Dans ce dernier cas, on dit que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est « semi-convergente » (convergente, sans l'être « absolument »). Des exemples de ce cas seront vus en exercices. La possibilité de convergence s'explique intuitivement par un phénomène de « compensation » entre les aires positives et les aires négatives définies par l'axe des x et les divers arcs du graphe de $f(x)$, autrement dit il est possible qu'avec les notations du (*a*) $\int_a^t g(x)\,dx$ et $\int_a^t h(x)\,dx$ deviennent infinies quand $t \to +\infty$, et que leur différence reste finie.

Notons encore qu'il n'est ni suffisant $\left(\text{exemple } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}, \text{ divergente}\right)$ ni nécessaire (voir exercices) que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 0$ pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Par contre si $f(x) \geqslant k > 0$, quand $x \to +\infty$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge (c'est un cas particulier du critère de Riemann).

Enfin $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$ n'implique pas que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ sont de même nature, si f et g ne gardent pas un signe constant pour x suffisamment grand (voir exercices).

Résumé du chapitre 10

INTÉGRALES DU TYPE $\int_a^b f(x)\,dx$, où $f(x) \underset{x \to b^-}{\to} +\infty$

- **Étude par comparaison.**

Si $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, $\int_a^b g(x)\,dx$ convergente $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ convergente.

$\int_a^b f(x)\,dx$ divergente $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ divergente.

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont, lorsque x tend vers b, des infiniment grands équivalents, les deux intégrales $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_a^b g(x)\,dx$ sont de même nature.

- **Règle de l'ordre.**

Si $f(x) \sim \dfrac{k}{(b-x)^\alpha}$, ($k$ réel non nul) lorsque $x \to b^-$, $\int_a^b \dfrac{dx}{(b-x)^\alpha}$ est convergente si $\alpha < 1$, divergente si $\alpha \geqslant 1$.

- **Règle de Riemann.**

Si $0 \leqslant (b-x)^\alpha f(x) \leqslant k$, $\alpha < 1$, $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente.

Si $(b-x)^\alpha f(x) \geqslant k > 0$, $\alpha \geqslant 1$, $\int_a^b f(x)\,dx$ est divergente.

INTÉGRALES DU TYPE $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

- **Étude par comparaison.**

Si $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ convergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ convergente

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ divergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ divergente

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions positives équivalentes lorsque x tend vers $+\infty$, les deux intégrales $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ sont de même nature.

- **Règle de l'ordre.**

Si $f(x) \sim \frac{k}{x^\alpha}$ (k réel non nul) lorsque $x \to +\infty$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente si $\alpha > 1$, divergente si $\alpha \geqslant 1$.

- **Règle de Riemann.**

Si $0 \leqslant x^\alpha f(x) \leqslant k$, $\alpha > 1$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente.

Si $x^\alpha f(x) \geqslant k > 0$, $\alpha \leqslant 1$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est divergente.

- **Cas d'une fonction de signe variable.**

$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ convergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ convergente, cette intégrale est alors dite absolument convergente.

Si $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ est divergente, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ peut être divergente, ou convergente (elle est alors dite semi-convergente).

EXERCICES

■ **1.** Étudier l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{Log} x}$$

$f(x) = \frac{1}{\operatorname{Log} x}$ n'est définie que sur $]0, 1[$. Quand $x \to 0^+$, $f(x) \to 0^-$, pas de problème de convergence. Quand

$x \to 1^-$, $x = 1 + t$, $t \to 0^-$, $\operatorname{Log} x = \operatorname{Log}(1 + t) \sim t$, $f(x) \sim \frac{1}{t} = \frac{1}{x - 1}$,

l'intégrale est divergente $\left(\text{car } \int_0^1 \frac{dx}{(1 - x)^\alpha} \text{ ne converge que si } \alpha < 1\right)$.

■ **2.** Pour quelles valeurs des réels positifs α et β l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$$

a-t-elle un sens ? On pourra supposer $\alpha \geqslant \beta$.

Quand $x \to 0^+$, $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha + x^\beta} \to +\infty$, on peut d'abord étudier

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}.$$

Si $\alpha > \beta$, $f(x) \sim \dfrac{1}{x^\beta}$ lorsque $x \to 0$, l'intégrale converge si et seulement si $\beta < 1$.

Si $\alpha = \beta$, $f(x) \sim \dfrac{1}{2\,x^\beta}$, là encore il faut $\beta < 1$.

Il reste à étudier $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Quand $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{si} \quad \alpha > \beta, \qquad f(x) \sim \frac{1}{2\,x^\alpha} \quad \text{si} \quad \alpha = \beta,$$

il faut donc $\alpha > 1$. On a appliqué dans les deux cas la règle de l'ordre.

L'intégrale donnée est donc toujours divergente si $\alpha = \beta$. Elle converge si et seulement si $\alpha > 1 > \beta$.

■ **3.** Pour quelles valeurs de α l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x + \sqrt{x^2+1})^\alpha}$$

a-t-elle un sens ? Calculer alors sa valeur.

Le seul problème est celui de la borne infinie. Quand $x \to +\infty$,

$$\frac{1}{(x + \sqrt{x^2+1})^\alpha} \sim \frac{1}{(2\,x)^\alpha},$$

la règle de l'ordre donne la condition nécessaire et suffisante de convergence $\alpha > 1$.

Effectuons alors le changement de variable $x = \operatorname{sh} t$, l'intégrale devient

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} t\,dt}{(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)^\alpha} = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} t\,dt}{e^{\alpha t}} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{(1-\alpha)t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{(-1-\alpha)t}\,dt$$

$$I = \frac{1}{2(1-\alpha)}\left[e^{(1-\alpha)t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2(-1-\alpha)}\left[e^{(-1-\alpha)t}\right]_0^{+\infty}$$

Chacune des fonctions $e^{(1-\alpha)t}$ et $e^{-(1+\alpha)t}$ est nulle quand $t \to +\infty$, puisque $\alpha > 1$, et

$$I = \frac{1}{2(\alpha-1)} + \frac{1}{2(\alpha+1)}, \qquad \text{soit} \qquad I = \frac{\alpha}{\alpha^2-1}$$

■ **4.** L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\text{Arc cos } x}$ a-t-elle un sens ?

Sur $[0, 1]$, $y = \text{Arc cos } x$ décroît de $\frac{\pi}{2}$ à 0, il y a donc un problème quand $x \to 1$. Posons $x = 1 - t$, $t \to 0^+$, et $y = \text{Arc cos } (1-t)$, $1 - t = \cos y$, soit $t = 1 - \cos y \sim \frac{y^2}{2}$ puisque $y \to 0$.

y étant positif, il s'ensuit que $y \sim \sqrt{2t} = \sqrt{2}\, t^{1/2}$ et que la fonction à intégrer est équivalente à $\dfrac{1}{\sqrt{2}\,(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ quand $x \to 1$. D'après la règle de l'ordre, l'intégrale est convergente. Elle n'est pas pour autant calculable de façon élémentaire, la variable y permet de l'exprimer sous la forme $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\, dy$ que l'on ne sait pas davantage calculer. Cependant, du fait que $\dfrac{\sin y}{y} \to 1$ lorsque $y \to 0$, cette dernière intégrale est « propre » et ceci est une nouvelle preuve de l'existence de l'intégrale envisagée. Ce résultat est général : pour qu'une intégrale généralisée soit convergente il suffit qu'il existe un changement de variable la ramenant à une intégrale non généralisée.

■ **5.** Étudier et éventuellement calculer

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,.\, \text{Log tg } x \, dx$$

La fonction n'est définie ni en 0, ni en $\frac{\pi}{2}$. D'où deux études successives.

a) $x \to 0^+$, $\cos x \text{ Log tg } x \sim \text{Log } x$, car $\cos x \to 1$ et $\text{tg } x \sim x$, infiniment petits. Les deux fonctions ici considérées sont négatives, leurs intégrales sont de même nature, or $\displaystyle\int_0^a \text{Log } x\, dx$ converge, il en est donc de même de

$$\int_0^a \cos x \text{ Log tg } x \, dx,$$

pour tout a compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

b) $x \to \frac{\pi}{2}$, $\cos x \to 0$, $\operatorname{Log} \operatorname{tg} x \to +\infty$, d'où indétermination.

Mais $\cos x \operatorname{Log} \operatorname{tg} x = \cos x \,.\, \operatorname{Log} \sin x - \cos x \operatorname{Log} \cos x$. Le premier terme tend vers 0, le second aussi car de la forme $X \operatorname{Log} X$, où $X \to 0$. Il en résulte un prolongement par continuité en $\frac{\pi}{2}$, et l'absence de problème de convergence. En conclusion, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \operatorname{Log} \operatorname{tg} x \, dx$ existe, soit I sa valeur.

Une intégration par parties, avec $\operatorname{Log} \operatorname{tg} x = u$, $\cos x \, dx = dv$, donne

$$I = \left[\sin x \operatorname{Log} \operatorname{tg} x - \int \sin x \,.\, \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \, dx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Notons que l'on ne peut pas écrire

$$I = [\sin x \operatorname{Log} \operatorname{tg} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,.\, \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \, dx$$

car la première expression est infinie, et par suite la seconde aussi.

Or

$$\int \sin x \,.\, \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \, dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

donc

$$I = \left[\sin x \operatorname{Log} \operatorname{tg} x - \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Il reste à chercher les limites en 0 et $\frac{\pi}{2}$ de

$$F(x) = \sin x \operatorname{Log} \operatorname{tg} x - \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Quand $x \to 0$, $\sin x \operatorname{Log} \operatorname{tg} x \sim x \operatorname{Log} x \to 0$, $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \to 1$, $F(x) \to 0$.

Quand $x \to \frac{\pi}{2}$, on a une forme indéterminée $\infty - \infty$. Posons $x = \frac{\pi}{2} - t$, $t \to 0^+$.

$$F(x) = \cos t \operatorname{Log} \operatorname{cotg} t - \operatorname{Log} \operatorname{cotg} \frac{t}{2}$$

$$= \cos t \operatorname{Log} \cos t - \cos t \operatorname{Log} \sin t - \operatorname{Log} \cos \frac{t}{2} + \operatorname{Log} \sin \frac{t}{2}$$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} F(x) = \lim_{t \to 0} \varphi(t)$, où

$$\varphi(t) = \operatorname{Log} \sin \frac{t}{2} - \cos t \operatorname{Log} \sin t$$

$$= \operatorname{Log} \sin \frac{t}{2} - \cos t \left(\operatorname{Log} 2 + \operatorname{Log} \sin \frac{t}{2} + \operatorname{Log} \cos \frac{t}{2} \right)$$

$$= - \cos t \operatorname{Log} 2 + (1 - \cos t) \operatorname{Log} \sin \frac{t}{2} - \cos t \operatorname{Log} \cos \frac{t}{2}$$

Le premier terme tend vers $-\operatorname{Log} 2$, le troisième vers 0. Enfin le terme du milieu

$$g(t) = (1 - \cos t) \operatorname{Log} \sin \frac{t}{2} \sim \frac{t^2}{2} \operatorname{Log} \frac{t}{2} \sim \frac{t^2}{2} \operatorname{Log} t \to 0.$$

Il en résulte $I = - \operatorname{Log} 2$.

■ **6.** Pour quelles valeurs de α l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}(1 + x)}{x^\alpha} \, dx$$

est-elle convergente ?

$x \to 0^+$, $f(x) = \dfrac{\operatorname{Log}(1 + x)}{x^\alpha} \sim \dfrac{x}{x^\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha - 1}}$, $\displaystyle\int_0^1 f(x) \, dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha - 1 < 1$, $\alpha < 2$

$x \to + \infty$, $f(x) \sim \dfrac{\operatorname{Log} x}{x^\alpha}$.

Si $\alpha \leqslant 1$, $f(x) > \dfrac{1}{x}$, or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, donc aussi $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$.

Si $\alpha > 1$, on peut trouver $\beta \in]1, \alpha[$ tel que

$$x^\beta f(x) = \frac{\operatorname{Log} x}{x^{\alpha - \beta}} \underset{x \to + \infty}{\to} 0$$

et d'après la règle de Riemann l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$ converge. La condition cherchée est donc $1 < \alpha < 2$.

■ **7.** Montrer que $f(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \, dx$ est définie pour $\alpha > -1$. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$; trouver une relation de récurrence entre $f(n)$ et $f(n - 1)$, n étant entier $\geqslant 1$, et en déduire la valeur de $f(n)$.

Quand $x \to 0$, $x^\alpha e^{-x} \sim x^\alpha = \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge si $-\alpha < 1, \alpha > -1$.

Quand $x \to +\infty$, $x^2 \cdot x^\alpha e^{-x} = \dfrac{x^{\alpha+2}}{e^x} \to 0$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge quel que soit α. $f(\alpha)$ est donc définie sur $]-1, +\infty[$.

On a immédiatement $f(0) = 1$.

$$f(1) = \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$$

$$f(2) = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx = [-x^2e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x \cdot e^{-x}\,dx = 2f(1) = 2.$$

De même, en intégrant encore par parties,

$$f(n) = \int_0^{+\infty} x^ne^{-x}\,dx = [-x^ne^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} nx^{n-1} \cdot e^{-x}\,dx = nf(n-1)$$

En écrivant

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(1) &= 1 \cdot f(0) \\ f(2) &= 2 \cdot f(1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(n-1) &= (n-1)\,f(n-2) \\ f(n) &= nf(n-1) \end{aligned}$$

et en multipliant membre à membre ces relations, on obtient $f(n) = n\,!$

On remarque que $f(\alpha)$, qui ne peut être calculée élémentairement que si $\alpha \in \mathbb{N}$, est une fonction définie sur un intervalle, domaine continu, qui « prolonge » la factorielle. Cette idée sera reprise dans le tome 3 et donnera naissance à la fonction Γ.

■ **8.** Étudier l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^2+1}\,dx$$

$\left|\dfrac{\cos x^2}{x^2+1}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2+1}$, or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ converge $\left(\text{et vaut } \frac{\pi}{2}\right)$.

Donc

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\cos x^2}{x^2+1}\right| dx$$

converge, l'intégrale considérée dans l'énoncé est absolument convergente, donc convergente.

9. 1° Soit $f(x)$ une fonction définie, continue, positive, décroissante et possédant une dérivée continue sur $[a, +\infty[$, et telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Montrer que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) \sin x \, dx$ est convergente, ainsi que l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(x) \cos x \, dx.$$

2° Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{et} \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

sont convergentes. Sont-elles absolument convergentes ?

3° Étudier

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) dx.$$

Que peut-on en conclure concernant la règle d'étude d'une intégrale généralisée par équivalence ?

1° Intégrons par parties :

$$\int_a^{+\infty} f(x) \sin x \, dx = [-f(x) \cos x]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} f'(x) \cos x \, dx$$

Comme $f(+\infty) = 0$,

$$[-f(x) \cos x]_a^{+\infty} = f(a) \cos a$$

D'autre part

$$\int_a^{+\infty} |f'(x) \cos x| \, dx$$

converge car

$$|f'(x) \cos x| \leqslant |f'(x)| = -f'(x),$$

puisque

$$f'(x) \leqslant 0, \quad \text{et} \quad \int_a^{+\infty} -f'(x) \, dx = -[f(x)]_a^{+\infty} = f(a).$$

Il en résulte que $\int_a^{+\infty} f(x) \sin x \, dx$ est convergente.

Un raisonnement analogue montre que $\int_a^{+\infty} f(x) \cos x \, dx$ est convergente.

2° $\frac{\sin x}{x} \to 1$ quand $x \to 0$, donc $\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$ existe quel que soit $a > 0$

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x}.\sin x\,dx,$$

et la fonction $\frac{1}{x}$ remplit les conditions imposées à $f(x)$ dans la question précédente. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ est convergente.

Notons que sa valeur est $\frac{\pi}{2}$, ce qui sera établi dans le tome 3..

Même raisonnement pour $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$.

Par contre $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$ est divergente.

Étudions, pour ces deux intégrales, la convergence absolue éventuelle.

Il suffit d'étudier

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx.$$

Comme

$$|\sin x| \leqslant 1, \qquad |\sin x| \geqslant \sin^2 x$$

et

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x}\right),$$

or

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

diverge et

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$$

converge, donc

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$$

diverge et

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \quad \text{aussi.}$$

Même raisonnement pour $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$

en utilisant

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{\cos 2x}{x}\right).$$

Les intégrales envisagées

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx$$

sont semi-convergentes.

3° $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \underset{(x\to 0)}{\to} 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ satisfait sur $[a, +\infty[$ $(a>0)$ aux conditions du 1°,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$

est donc convergente.

Mais

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\frac{\sin^2 x}{x},$$

somme d'une fonction dont l'intégrale converge et d'une fonction dont l'intégrale diverge quand $x \to +\infty$, donne une intégrale divergente. Or

$$1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \to 1$$

quand $x \to +\infty$, les deux fonctions

$$g(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \qquad h(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)$$

sont donc équivalentes lorsque $x \to +\infty$. On voit que le théorème, suivant lequel $h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ entraîne que $\int_a^{+\infty} h(x)\,dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ sont de même nature, n'est plus valable lorsque les fonctions ne gardent pas un signe constant quand $x \to +\infty$.

■ **10.** Montrer que l'intégrale

$$\int_{-2}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}$$

est convergente, et la calculer.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}=\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+2)^{\frac{1}{3}}} \sim \frac{3^{-\frac{1}{3}}}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \text{ quand } x \to 1$$

$$\sim \frac{3^{-\frac{2}{3}}}{(x+2)^{\frac{1}{3}}} \text{ quand } x \to -2.$$

Dans les deux cas la règle de l'ordre permet d'affirmer la convergence.

Si nous écrivons

$$I = \int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^3 \dfrac{x+2}{1-x}}} dx = \int_{-2}^{1} \frac{1}{1-x} \sqrt[3]{\frac{1-x}{x+2}}\, dx,$$

on est conduit au changement de variable

$$t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{x+2}}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{1-2t^3}{1+t^3},$$

$$dx = d\left(-2 + \frac{3}{1+t^3}\right) = -\frac{9t^2\,dt}{(1+t^3)^2},$$

et

$$I = \int_{+\infty}^{0} \frac{1+t^3}{3t^3}\, t \cdot \frac{(-9t^2\,dt)}{(1+t^3)^2} = \int_{0}^{+\infty} \frac{3}{1+t^3}\, dt.$$

On décompose

$$\frac{3}{1+t^3} = \frac{3}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}.$$

En multipliant par $t+1$ et donnant à t la valeur -1, on trouve $A = 1$.
En multipliant par t et faisant tendre t vers ∞, $0 = A + B$, d'où $B = -1$.
En donnant à t la valeur 0, $3 = A + C$, d'où $C = 2$.
Donc

$$I = \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{t-2}{t^2-t+1}\right) dt = \left[\operatorname{Log}(t+1) - \int \frac{t-2}{t^2-t+1}\, dt\right]_0^{+\infty}$$

Nous écrivons

$$\int \frac{t-2}{t^2-t+1}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t-1-3}{t^2-t+1}\, dt = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(t^2-t+1) - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2-t+1}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Log}(t^2-t+1) - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Log}(t^2-t+1) - \sqrt{3}\operatorname{Arc\,tg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$$

Il en résulte

$$I = \left[\operatorname{Log}\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+1}} + \sqrt{3}\operatorname{Arc\,tg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty}$$

$\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2-t+1}} = 1$ quand $t = 0$, $\to 1$ quand $t \to +\infty$.

Il reste

$$I = \sqrt{3}\left[\text{Arc tg}\,(+\infty) - \text{Arc tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$$

■ **11.** On démontre (voir fin du chapitre sur les équations différentielles) que, dans le circuit R, L, C en série, aux bornes duquel on établit une tension constante V, avec une charge initiale q_0 pour le condensateur et un courant initial nul, le courant à l'instant t est

$$i(t) = \frac{CV - q_0}{LC\omega} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t, \qquad \text{où} \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

lorsque $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Montrer que l'énergie produite sous forme de chaleur dans la résistance R pendant l'intervalle de temps $[0, +\infty[$ a une valeur finie, et la calculer.

Cette énergie est

$$W = \int_0^{+\infty} Ri^2 \, dt = R\left(\frac{CV - q_0}{LC\omega}\right)^2 \int_0^{+\infty} (e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t)^2 \, dt$$

On est donc amené à calculer

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \sin^2 \omega t \, dt, \qquad \text{où} \qquad \alpha = \frac{R}{L} > 0$$

intégrale convergente car $0 \leqslant e^{-\alpha t} \sin^2 \omega t \leqslant e^{-\alpha t}$, et $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \, dt$ converge.

On a

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}(1 - \cos 2\omega t) \, dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cos 2\omega t \, dt$$

$$= \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}K$$

avec $K = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cos 2\omega t \, dt$.

En intégrant par parties,

$$K = \left[e^{-\alpha t} \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha t} \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \, dt$$

$$K = \frac{\alpha}{2\omega} H, \qquad \text{avec} \qquad H = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \sin 2\omega t \, dt$$

De même

$$H = \left[- e^{-\alpha t} \frac{\cos 2\omega t}{2\omega} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha t} \cdot \frac{\cos 2\omega t}{2\omega} \, dt = \frac{1}{2\omega} - \frac{\alpha}{2\omega} K$$

soit

$$H = \frac{1}{2\omega} - \frac{\alpha^2}{4\omega^2} H,$$

$$H = \frac{2\omega}{\alpha^2 + 4\omega^2}, \quad K = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\omega^2}. \qquad \text{D'où} \qquad J = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\omega^2}\right)$$

$$= \frac{2\omega^2}{\alpha(\alpha^2 + 4\omega^2)}$$

Il en résulte

$$W = R\left(\frac{CV - q_0}{LC\omega}\right)^2 \cdot \frac{2\omega^2}{\alpha(\alpha^2 + 4\omega^2)} = \frac{2R(CV - q_0)^2}{L^2C^2\alpha(\alpha^2 + 4\omega^2)}$$

Or

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^3}{4L^2}, \qquad \alpha = \frac{R}{L}, \qquad \alpha^2 + 4\omega^2 = \frac{4}{LC}$$

$$W = \frac{(CV - q_0)^2}{2C}$$

En particulier si $q_0 = 0$, l'énergie produite par la charge du condensateur est $\frac{1}{2} CV^2$. On obtiendrait les mêmes résultats lorsque

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \text{et} \qquad R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

■ **12.** Étudier et éventuellement calculer

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} \, dx.$$

Réponse : Convergente car $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} \sim \frac{1}{x^3}$ quand $x \to + \infty$.

Calcul par $x = \operatorname{ch} t$, on trouve $I = \left[\frac{\operatorname{th}^3 t}{3}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{3}$.

■ **13.** Montrer que $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} \sin x \, dx$ a un sens et est égale à $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} \cos x \, dx$. Former $A + B$ et en déduire la valeur commune de A et de B (sans calcul de primitives).

Réponse : A est convergente car $\operatorname{Log} \sin x \sim \operatorname{Log} x$ quand $x \to 0$.

On obtient $A = B$ en posant dans A, ou dans B, $x = \frac{\pi}{2} - t$.

$A + B = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Log sin } 2x \, dx$, on pose $2x = u$ et après calculs on obtient

$$A = B = -\frac{\pi}{2}\text{Log } 2.$$

■ **14.** Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\text{Log } x}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$$

dx est convergente, et la calculer.

Réponse : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \text{Log } x$, $f(x) \sim -(1-x)^{\frac{1}{2}} \underset{x\to 1}{\to} 0$, intégrale convergente.

Changement de variable $x = \cos t$ et intégration par parties $\Rightarrow$ $I = -\frac{\pi}{2} + \text{Log } 2$ (calcul de limite assez long).

■ **15.** Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Log } x}{1+x^2} dx$ est convergente, et la calculer au moyen du changement de variable $x = \frac{1}{t}$.

Réponse : $x \to 0$, $f(x) \sim \text{Log } x$; $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{\text{Log } x}{x^2}$ et $x^{\frac{3}{2}} \text{ Log } x \to 0$, intégrale convergente. $x = \frac{1}{t} \Rightarrow I = -I$, donc $I = 0$. Primitive non calculable car l'intégration par parties conduit à un « cercle vicieux ».

■ **16.** Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\text{ch } x + 2 \text{ sh } x}$ est convergente et la calculer.

Réponse : $f(x) \sim \frac{2}{3} e^{-x}$ quand $x \to +\infty$, d'où la convergence.

Changement de variable $e^x = t$, on obtient $I = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Log } (2 + \sqrt{3})$.

■ **17.** Discuter suivant les valeurs de α la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (x^2+1)^\alpha \text{ Arc tg } \frac{1}{x} dx.$$

La calculer pour $\alpha = -\frac{3}{2}$.

Réponse : En 0, valeur finie $\frac{\pi}{2}$. Quand $x \to +\infty$, $f(x) \sim x^{2\alpha-1} = \frac{1}{x^{1-2\alpha}}$, d'où $\alpha < 0$.

Pour calculer $\int_0^{+\infty} (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{x}\, dx$, on pose $\operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{x} = \varphi$, on arrive à :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

■ **18.** Étudier la convergence éventuelle de $\int_0^{+\infty} x \sin x^3 \, dx$.

Réponse : Posons $x^3 = t$, on arrive à

$$\frac{1}{3}\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{\frac{1}{t^3}}\, dt = \left[-\frac{1}{3}\frac{\cos t}{\frac{1}{t^3}}\right]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} \frac{1}{9}\frac{\cos t}{\frac{4}{t^3}}\, dt,$$

qui est convergente pour $a > 0$, il suffit d'ajouter une constante pour obtenir l'intégrale envisagée ici, qui converge aussi. Cet exercice illustre le fait qu'il n'est pas nécessaire d'avoir affaire à $f(x)$ bornée pour que $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge.

■ **19.** Étudier la convergence éventuelle de $\int_0^1 e^{(\operatorname{Log} x)^2}\, dx$.

Réponse : $f(x) \underset{x\to 0}{\to} +\infty$, $xf(x) = e^{\operatorname{Log} x + (\operatorname{Log} x)^2} \to +\infty$, intégrale divergente.

■ **20.** Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+6x+8}}$ est convergente, et la calculer.

Réponse : $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ quand $x \to +\infty$, d'où la convergence.

On pose $x + 3 = \operatorname{ch} \varphi$, $\operatorname{th} \frac{\varphi}{2} = t$, et on trouve $I = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Log}(5 + 2\sqrt{6})$.

■ **21.** Montrer que $\int_a^b \frac{x\, dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a < b)$ est convergente, et la calculer.

Réponse : Convergence immédiate par équivalence. Le calcul donne

$$I = \frac{\pi}{2}(a+b)$$

■ **22.** Montrer que $\int_0^{+\infty} \sqrt{2 - \operatorname{th} x - \operatorname{th}^2 x}\, dx$ est convergente, et la calculer.

Réponse : $x \to +\infty$, $f(x) \sim \sqrt{6} \cdot e^{-x}$, d'où la convergence.

Calcul par $\operatorname{th} x = u$, puis $\sqrt{\dfrac{2+u}{1-u}} = t$, on obtient

$$I = 2 \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Log} 3.$$

23. Dire dans quels cas les intégrales suivantes sont convergentes

a) $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dt}{t^n \operatorname{Arg\,ch} t}$; (a > 0)

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Arg\,sh} t + \operatorname{Log} t}{3t\sqrt{t} + 4t + 5}\, dt$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^{-n} e^{\frac{1}{x}}\, dx$;

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Log} x}{(1-x)^{\alpha}}\, dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(1 - \frac{x^n}{\sqrt{1+x^{2n}}}\right) dx$;

f) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{(x^2-1)^{\alpha}}\, dx$

Réponses : *a)* $n > 1$; *b)* convergente; *c)* $n > 1$; *d)* $\alpha < 2$; *e)* $n > \frac{1}{2}$; *f)* $0 < \alpha < 1$.

CHAPITRE 11

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES

1. NOTIONS GÉNÉRALES. DÉRIVÉES PARTIELLES

Définitions

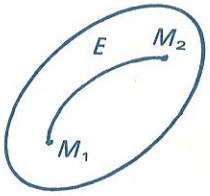
- Une fonction de n variables réelles est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \xrightarrow{f} u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Le cas où $n = 1$ est évidemment celui, déjà étudié, d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le plus souvent, $n = 2$ ou $n = 3$, on note alors $u = f(x, y)$ ou $u = f(x, y, z)$. Les variables sont les coordonnées d'un point M, en dimension 2 ou 3, dans un repère que nous supposerons, sauf indication contraire, orthonormé, et on peut écrire $u = f(M)$.

- L'ensemble de définition E de f, partie de $\mathbb{R}^n$, est l'ensemble des « points » M tels que $f(M)$ existe. C'est le plus souvent un « domaine », c'est-à-dire un ensemble continu ou « connexe » : on appelle ainsi un ensemble E tel que deux points quelconques M_1 et M_2 de E peuvent être joints par un arc continu inclus dans E.

Sauf si $E = \mathbb{R}^n$, un domaine E possède une frontière (courbe fermée ou non),



et si E est envisagé frontière comprise, il est dit fermé; frontière non comprise, il est dit ouvert; il peut être évidemment semi-ouvert.

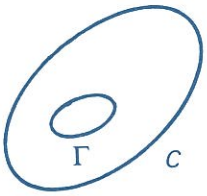
Exemples. $$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \tag{1}$$

est définie sur le domaine $x^2 + y^2 \leqslant 1$, disque fermé de centre O, de rayon 1.

$$g(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}} \tag{2}$$

est définie sur le domaine $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, boule ouverte de centre O, de rayon 1.

• Notons encore qu'un domaine est dit simplement connexe s'il contient l'intérieur de toute courbe fermée Γ tracée dans le domaine, c'est-à-dire s'il ne présente pas de trou : le domaine $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2$, couronne circulaire, est connexe, mais non simplement connexe. Enfin $\mathbb{D}$ est convexe s'il contient tout vecteur joignant deux de ses points.



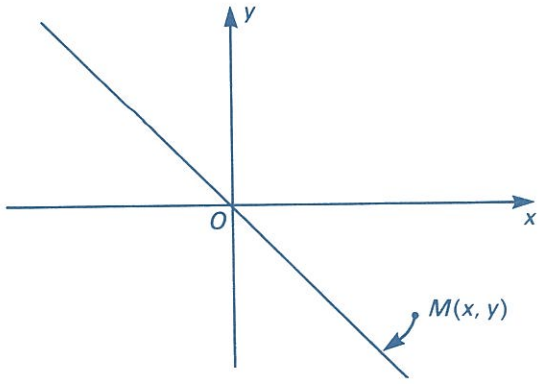
Notion de limite

• $M_0\,(x_0, y_0)$ étant un point du domaine de définition $\mathbb{D}$ d'une fonction f, ou de sa frontière, on dit que f a pour limite l lorsque $M(x, y)$, point de $\mathbb{D}$, tend vers M_0, si $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \alpha > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \alpha, \quad |y - y_0| < \alpha \Rightarrow |f(M) - l| < \varepsilon$$

On écrit $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = l$ ou $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = l$

• La notion de limite infinie s'adapte facilement, de façon analogue, au cas de plusieurs variables : par exemple $\dfrac{1}{x + y} \to + \infty$ lorsque $x + y \to 0^+$, $M(x, y) \to$ point de la droite $x + y = 0$, au dessus de cette droite.



• Les théorèmes sur les limites : limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, avec les restrictions habituelles, donnant naissance aux « formes indéterminées », sont valables pour les fonctions de plusieurs variables comme pour celles d'une seule variable, et se démontrent de la même manière.

Continuité

Une fonction $f(M)$ est dite continue en un point M_0 de son domaine de définition si elle admet $f(M_0)$ pour limite quand M tend vers M_0.

Si elle est continue en tout point d'un domaine $\mathbb{D}$, on dit qu'elle est continue sur $\mathbb{D}$. Une somme, un produit, un quotient de fonctions continues sont des fonctions continues (sauf évidemment en cas de dénominateur nul). Ainsi, par exemple, une fonction polynôme de n variables est définie et continue sur $\mathbb{R}^n$.

Dérivées partielles premières

Raisonnons, par exemple, pour $n = 3$; considérons donc une fonction $f(x, y, z)$ définie sur un domaine $\mathbb{D}$, et soit $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathbb{D}$. Nous dirons que f admet en M_0 une dérivée partielle par rapport à x, si la fonction $\varphi(x) = f(x, y_0, z_0)$ où y et z ont les valeurs fixes y_0 et z_0, est dérivable pour $x = x_0$. Autrement dit cette dérivée partielle est $\varphi'(x_0)$, notée $f'_x(x_0, y_0, z_0)$, ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$.

En résumé

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0}$$

Définition analogue pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(M_0)$.

Pratiquement, le calcul d'une dérivée partielle par rapport à une variable se fait en supposant constantes les autres variables, et en appliquant les mêmes règles (linéarité, produit, quotient) que pour les fonctions d'une variable. Notons dès à présent que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est une notation et non un quotient, ∂f et ∂x n'ont pas de sens individuellement.

Si une fonction f possède des dérivées partielles en tout point d'un domaine $\mathbb{D}$, on dit qu'elle est dérivable sur $\mathbb{D}$, ses dérivées partielles sont alors des fonctions définies sur $\mathbb{D}$. Soit par exemple

$$f(x, y, z) = x^2 z \operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{z},$$

définie pour $z \neq 0$.

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xz \operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 z \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2}{z^2}} = \frac{x^2 z^2}{y^2 + z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2 \operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{z} + x^2 z \left(- \frac{y}{z^2} \right) \frac{1}{1 + \frac{y^2}{z^2}} = x^2 \left(\operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{z} - \frac{yz}{y^2 + z^2} \right)$$

Dérivées partielles d'ordre supérieur à 1. Théorème de Schwarz

Raisonnons encore avec trois variables. Si les dérivées partielles de f existent et sont dérivables sur $\mathbb{D}$, leurs dérivées partielles sont pour f les dérivées partielles secondes. Nous écrirons

$$(f'_x)'_x = f''_{x^2}, \ (f'_x)'_y = f''_{xy} \quad \text{etc.}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{etc.}$$

ce qui donne naissance à neuf dérivées partielles secondes. On peut le plus souvent dériver encore et obtenir $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$ etc., les dérivations successives étant notées dans l'ordre inverse de celui où on les effectue. Par exemple $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial x \partial z}$ s'obtient en dérivant successivement par rapport à z, x, y, x.

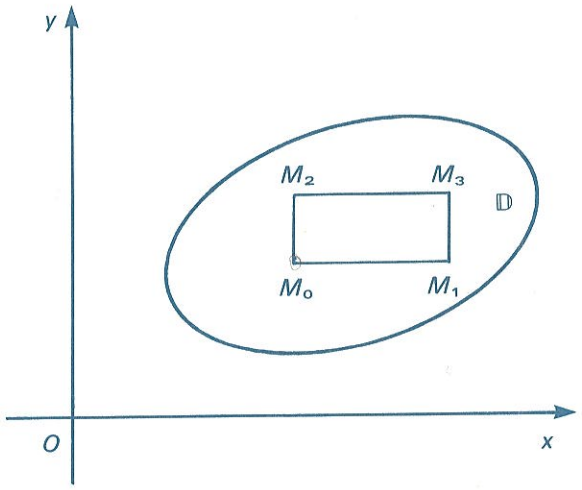
Reprenons l'exemple numérique de la fin du paragraphe précédent. On obtiendra :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2z \operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{z}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x \cdot \frac{z^2}{y^2 + z^2}, \ \ldots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2xz^2}{y^2 + z^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = - \frac{2x^2 yz}{(y^2 + z^2)^2} \text{ etc.}$$

On constate ici que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Est-ce général ? Cette comparaison ne met en jeu que des dérivations par rapport à x et y, dans laquelle z et d'autres variables éventuelles, jouent le rôle de constantes, aussi nous raisonnerons sur une fonction $f(x, y)$ de deux variables seulement; nous supposerons que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existent sur un domaine $\mathbb{D}$ et sont continues en $M_0 \in \mathbb{D}$, et nous allons démontrer qu'alors $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, en M_0.

Soit $M_0(x_0, y_0)$ et soit h et k réels tels que $M_1(x_0 + h, y_0)$, $M_2(x_0, y_0 + k)$ et $M_3(x_0 + h, y_0 + k)$, ainsi que tout point intérieur au rectangle ainsi défini, appartiennent à $\mathbb{D}$. Nous supposons $h \neq 0$ et $k \neq 0$.



Considérons l'expression

$$\Delta = f(M_0) + f(M_3) - f(M_1) - f(M_2)$$

que nous transformerons de deux façons :

a) $\Delta = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - [f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)]$.

En posant

$$f(x_0 + h, y) - f(x_0, y) = \varphi(y),$$

Δ s'écrit

$$\Delta = \varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0).$$

Le théorème des accroissements finis donne

$$\Delta = k\varphi'(y_0 + \theta_1 k), \qquad \theta_1 \in]0, 1[.$$

Or

$$\varphi'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y),$$

d'où

$$\Delta = k\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \theta_1 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_1 k)\right]$$

Le théorème des accroissements finis, appliqué cette fois sur la variable x, donne

$$\Delta = kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_1 k), \qquad \theta_2 \in]0, 1[$$

$$b)\ \Delta = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)].$$
$$= \psi(x_0 + h) - \psi(x_0),$$

si l'on pose

$$\psi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$$

donc

$$\Delta = h\psi'(x_0 + \theta_3 h)$$

et, comme ci-dessus, les rôles de x et y étant échangés,

$$\Delta = hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k),$$

où θ_3 et $\theta_4 \in]0, 1[$.

Ainsi il existe deux points

$$M(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_1 k) \quad \text{et} \quad M'(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k),$$

strictement intérieurs au rectangle $M_0M_1M_3M_2$, tels que

$$\Delta = hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M') \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M') = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M)$$

Quand $h \to 0$ et $k \to 0$, $M \to M_0$ et $M' \to M_0$, et d'après l'hypothèse de continuité on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)$$

d'où le théorème de Schwarz :

Si $f(x, y)$ admet des dérivées $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sur $\mathbb{D}$, et si ces dérivées sont continues en un point M_0 de $\mathbb{D}$, on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en M_0.

Généralisation : si les dérivées partielles successives d'une fonction de n variables sont continues sur un domaine $\mathbb{D}$, une dérivée partielle d'ordre k pourra être notée

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \text{avec} \quad \alpha_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_1^n \alpha_i = k,$$

elle ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les α_1 dérivations par rapport à $x_1, \dots$, les α_n dérivations par rapport à x_n. Sauf indication contraire, nous n'envisagerons dans ce qui suit que de telles fonctions.

2. FONCTION COMPOSÉE. FORMULE DE TAYLOR. DIFFÉRENTIELLE

Fonction composée

On dit que f est une fonction composée des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, par l'intermédiaire des p fonctions « composantes »

$$u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

si elle est définie par une relation de la forme générale

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F[u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

Nous raisonnerons, pour simplifier, sur le cas $n = p = 2$, et utiliserons les notations

$$f(x, y) = F[u(x, y), v(x, y)].$$

f est évidemment définie sur $\mathbb{D}$, domaine du plan (Ox, Oy), si F est elle-même définie sur Δ, domaine du plan $(O'u, O'v)$ image de $\mathbb{D}$ par l'application

$$(x, y) \to (u, v).$$

Si de plus F admet sur Δ des dérivées partielles premières continues et si u et v admettent sur $\mathbb{D}$ des dérivées partielles premières, il en est de même de f, et les dérivées de f sont données par les formules

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Démonstration abrégée :

Soit

$$\delta = f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = F[u(x_0 + h, y_0), v(x_0 + h, y_0)] - F[u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)]$$

soit en notant

$$u_0 = u(x_0, y_0), \quad u_1 = u(x_0 + h, y_0), \quad v_0 = v(\ldots), v_1 = v(\ldots),$$

$$\delta = F(u_1, v_1) - F(u_0, v_0),$$

$$\frac{\delta}{h} = \frac{F(u_1, v_1) - F(u_0, v_1)}{u_1 - u_0} \cdot \frac{u_1 - u_0}{h} + \frac{F(u_0, v_1) - F(u_0, v_0)}{v_1 - v_0} \cdot \frac{v_1 - v_0}{h}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial u}(u_2, v_1) \cdot \frac{u_1 - u_0}{h} + \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_2) \cdot \frac{v_1 - v_0}{h},$$

avec $u_2 \in]u_0, u_1[$, $v_2 \in]v_0, v_1[$ et

$$\lim_{h \to 0} \frac{\delta}{h} = \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Le système (I) s'écrit encore, sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F}{\partial v} \end{pmatrix}$$

où la matrice

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

est la « matrice jacobienne » de u et v par rapport à x et y.

Dans la pratique on confond souvent f et F qui ont même valeur en des points associés (x, y) et (u, v), de sorte que l'on écrit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

On voit que « simplifier » $\dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}$ conduirait à une absurdité.

Changement de variables. Notion d'équation aux dérivées partielles

Les formules précédentes s'appliquent au cas où, cherchant à déterminer une fonction $f(x, y)$, il est plus commode de changer de variables en cherchant f fonction de $u(x, y)$, $v(x, y)$. On prendra alors pour (x, y) et (u, v) une application bijective respectant l'indépendance des deux variables retenues pour exprimer f, c'est-à-dire dans les cas concrets le nombre de paramètres dont dépend le phénomène physique exprimé par f. Si u et v sont dérivables, la matrice jacobienne J doit être inversible, donc le déterminant jacobien

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

En fait nous admettrons qu'il peut s'annuler en des points exceptionnels de $\mathbb{D}$.

Un exemple classique est le passage des coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé aux coordonnées polaires ρ, θ dans le repère associé : on a donc $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, application bijective sauf en $x = 0$, $y = 0$,

si on convient $\rho \geqslant 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Dans la pratique ces conditions sur ρ, θ ne sont pas indispensables car on on peut calculer :

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow 2x = 2\rho \frac{\partial \rho}{\partial x},\ 2y = 2\rho \frac{\partial \rho}{\partial y},\ \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} = \cos\theta,\ \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho} = \sin\theta$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta \Rightarrow -\frac{y}{x^2} = (1 + \operatorname{tg}^2\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x},\ \frac{1}{x} = (1 + \operatorname{tg}^2\theta)\frac{\partial \theta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{\rho^2} = -\frac{\sin\theta}{\rho},\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{\rho^2} = \frac{\cos\theta}{\rho}$$

Par exemple soit à résoudre l'équation « aux dérivées partielles »

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

c'est-à-dire à chercher $f(x, y)$ vérifiant (1).

On aura, en passant aux variables ρ, θ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\rho},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho}$$

$f(\rho, \theta)$ devra donc satisfaire à

$$\rho\cos\theta\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\rho}\right) + \rho\sin\theta\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho}\right) = 0$$

soit $\rho\dfrac{\partial f}{\partial \rho} = 0$, et comme $\rho \neq 0$ sauf en un point, $\dfrac{\partial f}{\partial \rho} = 0$.

Il s'ensuit que f ne dépend que de θ :

$$f(\rho, \theta) = g(\theta) = \varphi(\operatorname{tg}\theta) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

les fonctions cherchées sont donc définies par $f(x, y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, où φ est une fonction dérivable quelconque.

Formule des accroissements finis. Formule de Taylor

● Raisonnons encore sur $f(x, y)$, que nous supposerons pourvue de dérivées partielles continues sur un domaine $\mathbb{D}$.

Supposons que $M_0\ (x_0, y_0)$ et $M_1\ (x_0 + h, y_0 + k)$, ainsi que tout point du vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$, appartiennent à $\mathbb{D}$, et considérons la fonction

$$\varphi(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt),$$

définie, continue et possédant une dérivée continue sur [0, 1]. On a

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta), \qquad \theta \in]0, 1[.$$

Or

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

avec $x = x_0 + ht$, $y = y_0 + kt$, donc

$$\varphi'(t) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}$$

Il en résulte

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k\frac{\partial f}{\partial y}(\ldots)$$

que nous écrirons plus simplement

$$\boldsymbol{f(M_1) - f(M_0) = \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_2}}$$

la valeur de la fonction $h\dfrac{\partial f}{\partial x} + k\dfrac{\partial f}{\partial y}$ étant prise en M_2, point du vecteur « ouvert » $\overrightarrow{M_0M_1}$.

C'est la formule des accroissements finis pour une fonction de deux variables.

● Si nous supposons f pourvue de dérivées partielles d'ordre 1 et 2 continues sur $\mathbb{D}$, la formule de Taylor à l'ordre 1, appliquée à φ, donne

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(\theta), \qquad \theta \in]0, 1[$$

Or

$$\varphi''(t) = h\left(h\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + k\left(h\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Cette expression rappelle un carré, précisément elle se déduit du carré de

$$h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}$$

par la substitution de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad \text{à} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

Nous l'appellerons carré symbolique de

$$h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}$$

et le représenterons par

$$\left(\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)^{(2)}.$$

Ainsi

$$f(M_1) = f(M_0) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0} + \frac{1}{2}\left(\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)^{(2)}_{M_2}, \qquad M_2 \in \overrightarrow{M_0M_1}$$

Plus généralement, en appliquant à $\varphi(t)$ la formule de Taylor sur $[0, 1]$ à l'ordre n, en supposant f « de classe C^{n+1} », c'est-à-dire possédant des dérivées partielles continues d'ordre $\leqslant n + 1$, sur $\mathbb{D}$, on obtient la formule de Taylor à l'ordre n pour $f(x, y)$, au voisinage de M_0 :

$$f(M_1) = f(M_0) + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p!}\left(\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)^{(p)}_{M_0} + \frac{1}{(n+1)!}\left(\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)^{(n+1)}_{M_2}, \qquad M_2 \in \overrightarrow{M_0M_1}$$

La puissance symbolique $p^{\text{ième}}$ s'obtient à partir de la puissance ordinaire par la substitution

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{\beta} \to \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}.$$

Cette formule fournit un développement limité d'ordre n de $f(M_1)$ suivant h et k, supposés alors infiniment petits, on écrit alors le dernier terme ou « reste » sous la forme

$$\| \overrightarrow{M_0M_1} \|^n \varepsilon(M_0M_1) \qquad \text{ou} \qquad (\sqrt{h^2 + k^2})^n \cdot \varepsilon(h, k), \quad \text{avec} \quad \lim_{M_1 \to M_0} \varepsilon = 0.$$

Tout ceci s'étend facilement à un nombre quelconque de variables.

Différentielle d'une fonction

h et k étant des réels constants, l'expression

$$h\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$$

s'appelle différentielle de f en M_0, et se note $(\mathrm{d}f)_{M_0}$. Si f possède des dérivées partielles sur $\mathbb{D}$, elle est différentielle sur $\mathbb{D}$, et réciproquement. Comme

$$\mathrm{d}(x) = h\frac{\partial x}{\partial x} + k\frac{\partial y}{\partial x} = h, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}(y) = h\frac{\partial y}{\partial x} + k\frac{\partial y}{\partial y} = k,$$

on adopte l'écriture $h = \mathrm{d}x$, $k = \mathrm{d}y$, la différentielle (ou différentielle totale) de f est donc par définition :

$$\mathbf{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{d}y$$

Cette définition s'étend à n variables :

$$\mathrm{d}[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i.$$

La connaissance de $\mathrm{d}f$ équivaut à celle des dérivées partielles premières de f. Par exemple

$$\mathrm{d}\left(x^2 z \operatorname{Arc\,tg}\frac{y}{z}\right) = 2xz \operatorname{Arc\,tg}\frac{y}{z}\mathrm{d}x + \frac{x^2z^2}{y^2+z^2}\mathrm{d}y + x^2\left(\operatorname{Arc\,tg}\frac{y}{z} - \frac{yz}{y^2+z^2}\right)\mathrm{d}z.$$

La différentiation est une opération linéaire, en effet, $\forall\ \lambda, \mu$ réels constants,

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda\,\mathrm{d}f + \mu\,\mathrm{d}g.$$

L'intérêt essentiel de la notion de différentielle provient, comme pour les fonctions d'une variable, de son invariance vis-à-vis des changements de variables. On vérifiera facilement que si

$$f(x, y) = F[u(x, y), v(x, y)], \quad \mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial F}{\partial v}\mathrm{d}v = \mathrm{d}f,$$

si l'on considère évidemment $\mathrm{d}u$ et $\mathrm{d}v$ non comme des constantes, mais comme les différentielles des fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$, et si l'on tient compte des formules de dérivation d'une fonction composée.

Par exemple $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ donnent

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad \rho\,\mathrm{d}\rho = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}\rho = \cos\theta\,.\,\mathrm{d}x + \sin\theta\,.\,\mathrm{d}y.$$

$$\theta = \operatorname{Arc\,tg}\frac{y}{x} + k\pi,\ \mathrm{d}\theta = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \frac{-\sin\theta\,\mathrm{d}x + \cos\theta\,\mathrm{d}y}{\rho},$$

et si $f(x, y) = F(\rho, \theta)$,

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}f \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \rho}(\cos\theta\,\mathrm{d}x + \sin\theta\,\mathrm{d}y) + \frac{\partial F}{\partial \theta}\cdot\frac{-\sin\theta\,\mathrm{d}x + \cos\theta\,\mathrm{d}y}{\rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

d'où par identification en $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \rho}\cdot\cos\theta - \frac{\partial F}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\rho}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \rho}\cdot\sin\theta + \frac{\partial F}{\partial \theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\rho},$$

déjà obtenu au (2°).

Formes différentielles. Intégrabilité et intégration

- La différentielle df d'une fonction de deux variables est de la forme

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Une telle expression, notée souvent ω, est une forme différentielle à 2 variables. Est-elle nécessairement la différentielle d'une fonction f, si P et Q sont des fonctions quelconques ?

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = P\,dx + Q\,dy \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = P & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = Q & (2) \end{cases}$$

En dérivant (1) par rapport à y et (2) par rapport à x et en appliquant le théorème de Schwarz, on voit que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Cette égalité est donc nécessaire pour qu'il existe f telle que $df = \omega$. On démontre, et nous admettrons, qu'elle est suffisante, d'où le théorème :

Pour que la forme différentielle $\omega = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ soit une différentielle (on précise souvent : différentielle exacte) sur le domaine $\mathbb{D}$, **il faut et il suffit** que P et Q vérifient sur $\mathbb{D}$ la relation

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (I)$$

f est alors une intégrale de ω, (I) est la condition d'intégrabilité de ω.

Si deux fonctions $f(x, y)$ et $f_0(x, y)$ ont même différentielle ω, on a

$$d(f - f_0) = 0,$$

donc

$$\frac{\partial (f - f_0)}{\partial x} = \frac{\partial (f - f_0)}{\partial y} = 0,$$

$f - f_0$ ne dépend ni de x ni de y, c'est donc une constante. Ainsi toute intégrale de ω est de la forme $f_0(x, y) + C$, où C est une constante. Le calcul pratique de f, c'est-à-dire l'intégration de ω, peut être mené comme suit :

Soit par exemple

$$\omega = (2x + y)\,dx + (x - 4y)\,dy,$$

où $P = 2x + y$, $Q = x - 4y$. On a bien $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, ω est donc intégrable.

Cherchons f telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x - 4y & (2) \end{cases}$$

Intégrons (1) par rapport à x, on aura $f = x^2 + xy + \varphi(y)$, φ étant inconnue.

Reportons dans (2), il vient

$$x + \varphi'(y) = x - 4y,$$

d'où

$$\varphi'(y) = -4y, \quad \varphi(y) = -2y^2 + C,$$

et

$$f(x, y) = x^2 + xy - 2y^2 + C,$$

C = constante.

Lorsque $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, ω n'est pas intégrable, on peut alors démontrer qu'il existe une infinité de fonctions non nulles $\varphi(x, y)$, appelées facteurs intégrants de ω, telles que la forme différentielle $\omega \cdot \varphi(x, y)$ soit intégrable (voir exercices).

Par exemple $\dfrac{1}{x^2}$ est un facteur intégrant de

$$y\,dx - x\,dy, \qquad \text{car} \qquad \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} = d\left(-\frac{y}{x}\right).$$

● Plus généralement on appelle forme différentielle à n variables une expression de la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^{i=n} P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_i.$$

Pour que ω soit intégrable sur $\mathbb{D}$, il faut (immédiat) et il suffit (admis) que les P_i vérifient sur $\mathbb{D}$ les relations

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i},$$

pour tout couple (i, j) d'entiers $\in \{1, 2, \ldots, n\}$, ce qui donne

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

conditions d'intégrabilité.

Pour $n \geqslant 3$, ω donnée quelconque n'admet généralement pas de facteur intégrant.

Extremum d'une fonction de plusieurs variables

Une fonction de n variables, notée $f(M)$, présente un extremum en M_0 si pour tout M suffisamment voisin de M_0, mais distinct de M_0, $f(M) - f(M_0)$ garde un signe constant. Si $f(M) - f(M_0) > 0$, il s'agit d'un minimum; si $f(M) - f(M_0) < 0$, il s'agit d'un maximum. Par exemple

$$x^2 + 2y^2 - 2x = (x - 1)^2 + 2y^2 - 1$$

admet en $M_0(1, 0)$ un minimum égal à -1. Nous nous bornerons au cas de deux variables et nous noterons p et q les dérivées partielles premières de f en M_0, r, s, t ses dérivées partielles secondes en M_0. Ainsi, M étant le point $(x_0 + h, y_0 + k)$, voisin de M_0, nous aurons

$$f(M) - f(M_0) = ph + qk + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + (h^2 + k^2)\,\varepsilon(h,k),$$

où $\lim_{(h\to 0,\,k\to 0)} \varepsilon = 0$ d'après la formule de Taylor.

Étudions le signe $f(M) - f(M_0)$ quand $(h, k) \to (0, 0)$.

• Si $(p, q) \neq (0, 0)$, $f(M) - f(M_0)$ est du signe de $ph + qk$ qui varie suivant la position du point (h, k) par rapport à la droite d'équation

$$px + qy = 0.$$

Il n'y a donc pas extremum en M_0. Il en résulte que

$$\boldsymbol{p = q = 0}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

sont des **conditions nécessaires d'un extremum** (à rapprocher de $f'(x) = 0$ pour un extremum de $f(x)$).

• Soit $p = q = 0$, $(r, s, t) \neq (0, 0, 0)$, $f(M) - f(M_0)$ est alors du signe du polynôme $\varphi(h, k) = rh^2 + 2shk + tk^2$, que l'on veut indépendant de la direction avec laquelle le vecteur (h, k) tend vers $\vec{0}$.

Si $k \neq 0$, $\varphi(h, k) = k^2(ru^2 + 2su + t)$, en posant $u = \dfrac{h}{k}$.

$\varphi(h, k)$ a donc le signe de $ru^2 + 2su + t$, qui est indépendant de u si et seulement si le discriminant $s^2 - rt$ est négatif. Si $k = 0$, $\varphi(h, k) = rh^2$, qui est bien de signe constant pourvu que $r \neq 0$, condition qui résulte de

$$s^2 - rt < 0.$$

Nous obtenons ainsi des **conditions suffisantes de l'extremum en M_0** :

$$\boldsymbol{p = q = 0}, \qquad \boldsymbol{s^2 - rt < 0}$$

Le signe de φ est alors celui de r, donc $r > 0 \Rightarrow$ minimum
$r < 0 \Rightarrow$ maximum.

Il va de soi que si $p = q = r = s = t = 0$, le développement de Taylor de f doit être poussé plus loin, nous n'insisterons pas sur ce cas. D'autre part s'il y a n variables, des conditions nécessaires de l'extremum en un point sont

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Il faut alors examiner le signe du terme du second degré du développement de Taylor (forme quadratique à n variables), là non plus nous n'insisterons pas actuellement, il faut utiliser la « décomposition en carrés » d'une forme quadratique (voir tome IV).

Fonction implicite

Si plusieurs variables, trois par exemple, sont liées par une relation $F(x, y, z) = 0$, l'une d'entre elles, z par exemple, est une fonction implicite des autres. Cette fonction est définie sans ambiguïté sur le domaine $\mathbb{D}$ tel que, $\forall\ (x, y) \in \mathbb{D}$, $\exists\ z$ unique vérifiant $F(x, y, z) = 0$. Par exemple

$$z^3 + (x^2 + 1)\, z - xy^2 = 0$$

définit $z = \varphi(x, y)$ sur le domaine $\mathbb{R}^2$. Si la relation $F(x, y, z) = 0$ peut être résolue par rapport à z, $\varphi(x, y)$ est alors connue explicitement. Par extension, on parle encore de fonction implicite lorsque z vérifiant $F(x, y, z) = 0$ n'est pas unique, la fonction implicite possède alors plusieurs « déterminations ».

Si F admet des dérivées partielles par rapport à x, y et z, on peut démontrer que, sauf en des points exceptionnels, $z = \varphi(x, y)$ admet des dérivées partielles. Envisageons deux cas :

a) $z = \varphi(x)$ définie par $\boldsymbol{F(x, z) = 0}$.

Alors

$$\mathrm{d}F = 0 = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathrm{d}z,$$

d'où

$$\frac{\mathbf{d}z}{\mathbf{d}x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \text{si} \qquad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

b) $z = \varphi(x, y)$ définie par $\boldsymbol{F(x, y, z) = 0}$.

Alors

$$\mathrm{d}F = 0 = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathrm{d}z, \qquad \mathrm{d}z = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\,\mathrm{d}x - \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\,\mathrm{d}y,$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \text{si} \qquad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

Applications aux tangentes et plans tangents

a) Dans le repère orthonormé (Ox, Oy), $f(x, y) = 0$ représente une courbe plane C (si $O \in$ domaine décrit par f).

En tout point de cette courbe, soit $M(x, y)$, $\mathrm{d}f = 0$, donc

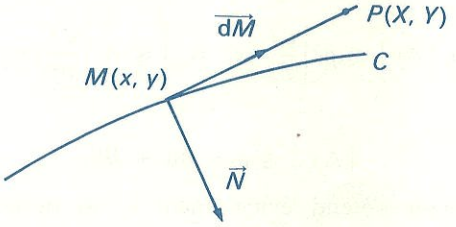
$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0,$$

et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}M}$ $(\mathrm{d}x, dy)$, tangent à C, est orthogonal au vecteur

$$\vec{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right);$$

donc, si ce vecteur n'est pas nul, il définit la normale en M à C. Si $P(X, Y)$ est un point de la tangente, $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{N} = 0$, soit

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$



Telle est l'équation de la tangente en M à C.

b) Dans le repère orthonormé (Ox, Oy, Oz), $f(x, y, z) = 0$ représente une surface S. En considérant comme ci-dessus le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}M}$ $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ comme un déplacement « élémentaire » sur S, on aura $\mathrm{d}f = 0$, soit

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = 0,$$

si $\vec{N}$ est le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$, supposé non nul. Les tangentes en M à toutes les courbes de S passant en M sont donc dans un même plan, appelé plan tangent à S en M, $\vec{N}$ définit la normale en M à S, et l'équation du plan tangent en M est

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Dans le cas particulier d'une équation de S résolue par rapport à z, $z = \varphi(x, y)$, on peut prendre $F(x, y, z) = \varphi(x, y) - z$, donc

$$\vec{N}\,(p, q, -1) \qquad \text{si} \qquad p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, q = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

et le plan tangent a pour équation $z = p(X - x) + q(Y - y)$.

Applications de la notion de différentielle aux calculs approchés

La différentielle

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y$$

fournit une approximation de l'accroissement subi par f quand, à partir du point $M_0\,(x_0, y_0)$, les variables x et y subissent de « petits » accroissements $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$. De ce fait elle fournit aussi une évaluation de l'erreur commise sur la valeur de f quand on connaît $x \simeq x_0$ et $y \simeq y_0$ avec des erreurs au plus égales respectivement à α et β.

Dans les deux cas, la petite variation de x, y, f, ..., sera le plus souvent notée Δx, Δy, Δf, ..., on aura donc

$$\Delta f \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\Delta y,$$

et si

$$|\Delta x| \leqslant \alpha, |\Delta y| \leqslant \beta, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right| \leqslant A, \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right| \leqslant B,$$

on aura

$$|\Delta f| \leqslant \varepsilon = A\alpha + B\beta.$$

Ce raisonnement s'étend évidemment à un nombre quelconque de variables.

Résumé du chapitre 11

- **Limite d'une fonction $f(x, y)$ en un point.**

On dit que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$

si, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \alpha > 0$ tel que $|x - x_0| < \alpha, |y - y_0| < \alpha \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon$

- **Continuité de $f(x, y)$ en un point de son domaine de définition.**

On dit que f est continue au point (x_0, y_0) si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

- **Dérivées partielles premières.**

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

se calcule en traitant y comme une constante.

Définition analogue pour $f'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

- **Dérivées partielles d'ordre supérieur à un.**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \text{ etc., notées aussi } f''_{x^2}, f''_{yx}, \ldots$$

Ces définitions et les précédentes s'étendent facilement à un nombre quelconque de variables.

- **Théorème de Schwarz.**

Si $f(x, y)$ admet sur $\mathbb{D}$ des dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, et si ces dérivées sont continues en un point M_0 de $\mathbb{D}$, on a en M_0

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

- **Fonction composée.**

Fonction de la forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F\left[u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right]$$

Dérivées partielles de $f(x, y) = F\left[u(x, y), v(x, y)\right]$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

- **Théorème des accroissements finis pour une fonction $f(x, y)$.**

Si $f(x, y)$ possède des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ continues sur $\mathbb{D}$, si $M_0(x_0, y_0)$ et $M_1(x_0 + h, y_0 + k)$, ainsi que tout point du segment qui les joint, appartiennent à $\mathbb{D}$, il existe au moins un nombre $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

• **Formule de Taylor.**

Si $f(x, y)$ possède des dérivées partielles successives d'ordre $\leqslant n+1$, continues sur $\mathbb{D}$, on a avec les notations du paragraphe précédent

$$f(M_1) = f(M_0) + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p!} \left(\left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right)_{M_0}^{(p)} + \frac{1}{(n+1)!} \left(\left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right)_{M_2}^{(n+1)},$$

M_2 étant un point du segment M_0M_1, et les puissances symboliques

$$\left(\left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right)^{(p)}$$

se déduisant des puissances ordinaires par

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^{\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^{\beta} \to \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}}$$

• **Différentielle (totale) de $f(x, y)$.**

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathrm{d}y$$

Elle est invariante dans un changement de variables.

Les notions précédentes s'étendent à un nombre quelconque de variables.

• **Formes différentielles.**

La forme différentielle $\omega = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ est intégrable, ou est une différentielle exacte, si et seulement si $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$$\omega = \sum_{i=1}^{i=n} P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_i$$

est intégrable si et seulement si

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}, \qquad \forall\, i, j.$$

• **Extremum.**

Conditions nécessaires pour l'extremum de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Conditions suffisantes pour l'extremum de $f(x, y)$:

$p = 0, \quad q = 0, \quad s^2 - rt < 0; \quad r > 0$, minimum
$r < 0$, maximum

$\left(\text{avec } \dfrac{\partial f}{\partial x} = p, \ldots, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t, \text{ notations de Monge}\right)$.

- **Fonction implicite.**

$z = \varphi(x, y)$ étant définie par $F(x, y, z) = 0$, on a (sous certaines conditions) :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

- **Normale et tangente à la courbe plane $f(x, y) = 0$.**

La normale a pour vecteur directeur

$$\vec{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

La tangente a pour équation

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

- **Normale et plan tangent à la surface $f(x, y, z) = 0$.**

La normale a pour vecteur directeur

$$\vec{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Le plan tangent a pour équation

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

Cas de $z = \varphi(x, y)$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = p$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = q$:

vecteur normal $\vec{N}(p, q, -1)$;
plan tangent $Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$.

EXERCICES

■ **1.** Étudier les domaines de définition, la continuité et les limites éventuelles des deux fonctions :

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad g(x, y) = x \operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{x}$$

---

a) $f(x, y)$ est définie pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, et continue en chacun de ces points car quotient de deux fonctions continues.

Étudions $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$: si $y = 0$, $x \neq 0$, $f(x, 0) = 1 \underset{x\to 0}{\to} 1$;

si $x = 0$, $y \neq 0$, $f(0, y) = -1 \underset{y\to 0}{\to} -1$

Ces limites sont différentes, la limite envisagée n'existe pas. D'ailleurs si on pose $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $\rho \neq 0$, $f(x, y) = \cos 2\theta$ peut prendre, quand $\rho \to 0$, toute valeur de l'intervalle $[-1, +1]$.

b) $g(x, y)$ est définie pour $x \neq 0$, et continue sur ce domaine, car produit de deux fonctions continues. Lorsque

$$(x, y) \to (0, y_0), \quad \left| \operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{x} \right| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\, g(x, y)\,| < \frac{\pi}{2} |\, x\,|,$$

il en résulte que $g(x, y) \to 0$. On peut, dans un tel cas, effectuer un « prolongement par continuité » de g en posant

$$g(x, y) = x \operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{x}, \quad \text{si} \quad x \neq 0$$

$$g(x, y) = 0, \quad \text{si} \quad x = 0, \quad y \in \mathbb{R}.$$

g est alors définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.

■ **2.** Soit la fonction $f(x, y)$ définie par

$$f(x, y) = x \operatorname{Arc\,tg} \left(\frac{y}{x}\right)^2 \quad \text{si} \quad x \neq 0$$

$$f(x, y) = 0 \qquad\qquad \text{si} \quad x = 0$$

f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? est-elle dérivable ? Quelles sont ses dérivées partielles ? Sont-elles continues ?

---

f est continue sur $\mathbb{R}^2$ (même raisonnement que pour g, exercice 1). Elle est manifestement dérivable pour $x \neq 0$, et on a en un tel point :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{Arc\,tg} \left(\frac{y}{x}\right)^2 + x \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^4} = \operatorname{Arc\,tg} \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{2x^2y^2}{x^4 + y^4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \frac{2y}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^4} = \frac{2x^3y}{x^4 + y^4}$$

Ces dérivées sont continues en tout point du domaine $x \neq 0$.

Est-elle dérivable en $(0, y_0)$?

Si $y_0 \neq 0$, $\dfrac{f(x, y_0) - f(0, y_0)}{x} = \operatorname{Arc\,tg}\left(\dfrac{y_0}{x}\right)^2 \underset{x\to 0}{\to} \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = \dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{f(0, y_0 + h) - f(0, y_0)}{h} = 0 \underset{h\to 0}{\to} 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) = 0$

Si $y_0 = 0$, $\dfrac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0 \underset{x\to 0}{\to} 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$

$\dfrac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0 \underset{y\to 0}{\to} 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$

On constate que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en tout point, par contre

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0,$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est donc pas continue au point $(0, 0)$; elle l'est en tout autre point.

■ **3.** Résoudre les équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad (f \text{ fonction de deux variables } x \text{ et } y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = 0 \qquad (f \text{ fonction de trois variables } x, y, z)$$

---

a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = 0, \dfrac{\partial f}{\partial x} = \varphi(y), f(x, y) = x\varphi(y) + \psi(y),$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires.

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = g(y), f(x, y) = G(y) + H(x),$

G et H étant deux fonctions arbitraires dérivables.

c) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) = 0, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = g(y, z) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right),$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial z} = g_1(y, z) + h_1(x, z), f = G(y, z) + H(x, z) + F(x, y)$

(car la « constante d'intégration » dans l'intégration d'une fonction de x, y, z par rapport à z, est une fonction arbitraire de x et y).

4. Soit $z(x, y) = f(x)\, g(y)$, f et g étant deux fonctions dérivables. Vérifier la relation

$$z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \tag{1}$$

Réciproquement, déterminer toutes les fonctions $z(x, y)$ satisfaisant à l'équation (1).

La vérification de (1) lorsque $z = f(x)\, g(y)$ est immédiate.

Pour la réciproque, prenons pour fonction inconnue $u(x, y) = \ln | z(x, y) |$, autrement dit posons

$$z = \varepsilon e^{u(x,y)}, \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1. \quad \text{Donc} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \varepsilon e^u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial u}{\partial x},$$

de même

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ enfin } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)$$

$$(1) \Leftrightarrow z^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = z^2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

Il en résulte (exercice 3) que $u = \varphi(x) + \psi(y)$, donc $z = \varepsilon e^{\varphi(x)}\, e^{\psi(y)}$, c'est-à-dire $z = f(x)\, g(y)$.

5. Montrer que toutes les fonctions de la forme $z = x f\left(\frac{y}{x}\right)$ sont solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \qquad (f \text{ deux fois dérivable}).$$

Posons

$$\frac{y}{x} = u, \quad z = x f(u) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = f(u) + x f'(u) \left(-\frac{y}{x^2} \right) = f(u) - \frac{y}{x} f'(u)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x f'(u) \cdot \frac{1}{x} = f'(u)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'(u) \left(-\frac{y}{x^2} \right) + \frac{y}{x^2} f'(u) - \frac{y}{x} f''(u) \left(-\frac{y}{x^2} \right) = \frac{y^2}{x^3} f''(u)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (f'(u)) = f''(u) \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (f'(u)) = f''(u) \cdot \frac{1}{x}$$

On a donc bien

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2}{x^4} [f''(u)]^2 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

Remarquons qu'ici la réciproque est fausse, $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ n'est qu'une famille de solutions particulières de l'équation aux dérivées partielles envisagée qui est du second ordre : on peut en effet penser, par analogie avec les exercices 3 et 4, que sa solution générale dépend de deux, et non pas seulement d'une, fonctions arbitraires.

■ **6.** 1° Dans une fonction $f(x, y)$, possédant des dérivées partielles de tous ordres, on effectue le changement de variables $x + ay = u$, $x + by = v$, de sorte que $f(x, y) = g(u, v)$.

a) Quelle condition doivent vérifier a et b pour que ce changement de variables soit acceptable ?

b) Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de f à l'aide de celles de F. Quelle généralisation peut-on envisager ?

2° En utilisant les valeurs $a = 1$, $b = -1$, déterminer f telle que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{1}$$

3° On cherche à déterminer f telle que

$$A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

A, B, C étant des réels. Montrer que, moyennant des conditions d'inégalité sur A, B, C, on peut choisir a et b tels que

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0,$$

et en déduire f.

1° *a*) Le jacobien est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a,$$

il doit être non nul, la condition est donc $a \neq b$.

D'ailleurs il est évident que si $a = b$, $u = v$, les nouvelles variables ne sont pas indépendantes.

b) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}$$

Pour passer aux dérivées d'ordre supérieur à 1, il suffit de réappliquer l'opérateur $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$ quand on dérive par rapport à x, l'opérateur $a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v}$ quand on dérive par rapport à y.

Ainsi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial u}\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right)$$

$$= a\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + (a+b)\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + b\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = a\frac{\partial}{\partial u}\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right) + b\frac{\partial}{\partial v}\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right) = a^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2ab\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + b^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x}$ est le carré symbolique $\left(\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right)\right)^{(2)}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est le carré symbolique $\left(\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right)\right)^{(2)}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ est le « produit symbolique » $\left(\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right)\right)\left(\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right)\right)$,

dans lequel le « symbolisme » consiste à remplacer $\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2$ par $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$, $\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2$ par $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$, et $\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}$ par $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$.

En généralisant cette écriture, on pourrait démontrer par récurrence que, si α et β sont des entiers positifs de somme égale à n,

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right)\right)^{(\alpha)}\left(\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right)\right)^{(\beta)}$$

2° Pour $a = 1$, $b = -1$, on obtient $u = x + y$, $v = x - y$, l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Leftrightarrow \left(\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right)\right)^{(2)} = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right)\right)^{(2)}, \tag{1}$$

soit $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$, dont la solution générale est $F(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$.

Celle de (1) est donc $f(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$.

Notons qu'à l'équation (1) se ramène l'équation du problème des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

(voir tome III), en effet il suffit de poser $ct = y$ pour être ramené à (1) et obtenir

$$z = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

$$3°\ (2) \Leftrightarrow A\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right) + 2B\left(a\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + (a + b)\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + b\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)$$
$$+ C\left(a^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2ab\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + b^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right) = 0$$

soit

$$(A + 2Ba + Ca^2)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2[A + B(a + b) + Cab]\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$$
$$+ (A + 2Bb + Cb^2)\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0.$$

On peut choisir a, b distincts tels que

$$Ca^2 + 2Ba + A = 0, \qquad Cb^2 + 2Bb + A = 0,$$

pourvu que $B^2 - AC > 0$. Il suffit alors de prendre pour a et b les deux racines réelles de l'équation du second degré $Ct^2 + 2Bt + A = 0$, et

$$(1) \Leftrightarrow k \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0, \Leftrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0,$$

pourvu que $k \neq 0$.

Or

$$k = A + B(a + b) + Cab = A + B\left(-\frac{2B}{C}\right) + C \cdot \frac{A}{C} = \frac{2(AC - B^2)}{C} \neq 0,$$

si $C \neq 0$.

Donc si $C \neq 0$ et $B^2 - AC > 0$,

$$(1) \Leftrightarrow f(x, y) = \varphi(x + ay) + \psi(x + by),$$

a et b étant les racines de $Ct^2 + 2Bt + A = 0$.

Si $C = 0$ et $A \neq 0$, il suffit d'envisager $y + \alpha x = t$, $y + \beta x = w$, avec α, β racines de $At^2 + 2Bt = 0$, c'est-à-dire $\alpha = 0$, $\beta = -\dfrac{2B}{A}$, et on obtient

$$f(x, y) = \varphi(y) + \psi(y + \beta x).$$

Enfin évidemment si $C = A = 0$, $B \neq 0$,

$$(2) \Leftrightarrow f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Dans les autres cas, l'équation (2) ne peut pas être résolue à l'aide des changements de variables envisagés ici. Elle sera étudiée dans le tome 3.

■ **7.** On considère deux fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ définies sur le domaine $\mathbb{D}$ convexe et possédant les propriétés suivantes :

a) $\forall (x, y) \in \mathbb{D}$, le point $[f(x, y), g(x, y)]$ appartient à $\mathbb{D}$;

b) $\forall (x, y) \in \mathbb{D}$, f et g admettent des dérivées partielles premières continues, et il existe un nombre $k \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leqslant k, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leqslant k,$$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right| \leqslant k, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right| \leqslant k$$

c) il existe un couple unique (α, β) tel que $\alpha = f(\alpha, \beta)$, $\beta = g(\alpha, \beta)$.

Démontrer que la suite (u_n, v_n) définie par la donnée de $(u_0, v_0) \in \mathbb{D}$, et par $u_n = f(u_{n-1}, v_{n-1})$, $v_n = (g(u_{n-1}, v_{n-1})$, si $n \geqslant 1$, est convergente et a pour limite (α, β). On pourra utiliser la suite $z_n = |u_n - \alpha| + |v_n - \beta|$.

Il s'agit de démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} v_n = \beta.$$

Comme $(u_0, v_0) \in \mathbb{D}$, $u_1 = f(u_0, v_0)$ et $v_1 = g(u_0, v_0)$ sont les coordonnées d'un point de $\mathbb{D}$, et par une récurrence immédiate il s'ensuit que $(u_n, v_n) \in \mathbb{D}$. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis et écrire

$$u_n - \alpha = f(u_{n-1}, v_{n-1}) - f(\alpha, \beta) = (u_{n-1} - \alpha)\frac{\partial f}{\partial x}(x_{n-1}, y_{n-1}) + (v_{n-1} - \beta)\frac{\partial f}{\partial y}(x_{n-1}, y_{n-1})$$

avec $(x_{n-1}, y_{n-1}) \in$ vecteur joignant (α, β) et (u_{n-1}, v_{n-1}). Ce point, d'après la convexité de $\mathbb{D}$, appartient à $\mathbb{D}$, et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(u_{n-1}, y_{n-1})\right| \leqslant k, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_{n-1}, y_{n-1})\right| \leqslant k,$$

de sorte que

$$|u_n - \alpha| \leqslant k(|u_{n-1} - \alpha| + |v_{n-1} - \beta|)$$

De même

$$|v_n - \beta| \leqslant k(|u_{n-1} - \alpha| + |v_{n-1} - \beta|)$$

et $\quad |u_n - \alpha| + |v_n - \beta| \leqslant 2k(|u_{n-1} - \alpha| + |v_{n-1} - \beta|)$,

c'est-à-dire

$$0 \leqslant z_n \leqslant 2kz_{n-1}.$$

De même

$$0 \leqslant z_{n-1} \leqslant 2kz_{n-2},$$
$$0 \leqslant z_{n-2} \leqslant 2kz_{n-3},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$0 \leqslant z_1 \leqslant 2kz_0,$$

donc en multipliant membre à membre ces inégalités de même sens portant sur des nombres positifs, on obtient :

$$0 \leqslant z_n \leqslant (2k)^n z_0.$$

Comme $0 < k < \frac{1}{2}$, $0 < 2k < 1$ et $\lim_{n\to\infty} (2k)^n = 0$, d'où $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Or $|u_n - \alpha| \leqslant z_n$ et $|v_n - \beta| \leqslant z_n$, donc $\lim u_n = \alpha$, $\lim v_n = \beta$.

Cette approche de (α, β) par une suite récurrente convergeant vers (α, β) permet une résolution numérique approchée de certains systèmes d'équations de la forme $x = f(x, y)$, $y = g(x, y)$, où f et g satisfont aux conditions du problème précédent.

■ **8.** Démontrer que toute fonction de la forme

$$z(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right),$$

où f et g sont deux fois dérivables, satisfait à la relation

$$\left(\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right)^{(2)} = 0 \qquad (1)$$

Réciproquement, trouver toutes les fonctions $z(x, y)$ vérifiant (1), à l'aide du changement de variables $x = u$, $\frac{y}{x} = v$.

Soit $z = f(v) + xg(v)$, avec $v = \frac{y}{x}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(v)\left(-\frac{y}{x^2}\right) + g(v) + xg'(v)\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2}f'(v) + g(v) - \frac{y}{x}g'(v)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}f'(v) + \frac{y^2}{x^4}f''(v) - \frac{y}{x^2}g'(v) + \frac{y}{x^2}g'(v) + \frac{y^2}{x^3}g''(v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(v)\cdot\frac{1}{x} + xg'(v)\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x}f'(v) + g'(v)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} f''(v) + \frac{1}{x} g''(v)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2} f'(v) - \frac{y}{x^3} f''(v) - \frac{y}{x^2} g''(v)$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Formons donc

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y}{x} f'(v) + \frac{y^2}{x^2} f''(v) + \frac{y^2}{x} g''(v)$$

$$2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{x} f'(v) - \frac{2y^2}{x^2} f''(v) - 2\frac{y^2}{x} g''(v)$$

$$y^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2}{x^2} f''(v) + \frac{y^2}{x} g''(v)$$

Par addition, la vérification de (1) est immédiate.

Pour résoudre (1), prenons les nouvelles variables $u = x$, $v = \frac{y}{x}$, manifestement indépendantes, on aura $z(x, y) = F(u, v)$, et les dérivées partielles de z s'expriment à l'aide de celles de F par

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial F}{\partial v}$$

Remarquons que, bien que $x = u$ et $z = F$, on ne peut pas écrire $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}$, c'est une des anomalies apparentes des calculs sur les dérivées partielles (apparente seulement car $\frac{\partial z}{\partial x}$ n'est pas un vrai quotient).

De même

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)$$

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2y \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{2y}{x} \frac{\partial F}{\partial v} \tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

$$y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \tag{3}$$

Enfin à partir de

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)$$

$$2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{x}\frac{\partial F}{\partial v} + 2y\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{2y^2}{x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \qquad (4)$$

En additionnant (2), (3) et (4), l'équation (1) apparaît sous la forme :

$$x^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0, \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = \varphi(v), \quad F = u\varphi(v) + \psi(v),$$

ou encore $$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

on retrouve bien les fonctions envisagées dans le (*a*).

■ **9.** Vérifier que la forme différentielle $\omega = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$ est une différentielle exacte, et intégrer ω.

$$\omega = P\,dx + Q\,dy, \quad \text{où} \quad P = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

On suppose $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

ω est donc bien une différentielle exacte.

Cherchons f telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2 + y^2} & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{x^2 + y^2} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow f(x, y) = y\int \frac{dx}{x^2 + y^2} = y \cdot \frac{1}{y}\operatorname{Arc\,tg}\frac{x}{y} + \varphi(y) = \operatorname{Arc\,tg}\frac{x}{y} + \varphi(y), \qquad (3)$$

y jouant ici le rôle d'une constante, supposée $\neq 0$.

En dérivant (3) et reportant dans (2), il vient

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} + \varphi'(y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \text{d'où} \quad \varphi'(y) = 0, \varphi(y) = C.$$

Donc $f(x, y) = \text{Arc tg}\,\frac{x}{y} + C$, C = constante.

Si $y = 0, x \neq 0, \omega = 0, f(x, 0) = k$.

Or si, pour x fixé $\neq 0$, $y \to 0$,

$$\text{Arc tg}\,\frac{x}{y} \to \quad \frac{\pi}{2} \text{ si } y \to 0 \text{ avec le signe de } x$$

$$\to -\frac{\pi}{2} \text{ si } y \to 0 \text{ avec le signe de } -x.$$

On voit que pour une valeur donnée de C, $f(x, y)$ subit une discontinuité quand on franchit l'axe $x'x$.

On peut aussi intégrer ω en utilisant les coordonnées polaires :

$$x = \rho \cos\theta,\ y = \rho \sin\theta \Rightarrow \omega = \frac{1}{\rho^2}[\rho \sin\theta\,(\mathrm{d}\rho \,.\, \cos\theta - \rho \sin\theta\,\mathrm{d}\theta) -$$

$$- \rho \cos\theta\,(\mathrm{d}\rho \sin\theta + \rho \cos\theta\,\mathrm{d}\theta)]$$

$$\omega = -\mathrm{d}\theta, \qquad \text{si } \rho \neq 0.$$

Donc $f(x, y) = F(\rho, \theta) = -\theta + C_1$, avec $\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$, donc $\theta = \text{Arc tg}\,\frac{y}{x} + k\pi$, k entier, on obtient donc

$$f(x, y) = C_1 + k\pi - \text{Arc tg}\,\frac{y}{x}$$

Or $\text{Arc tg}\,\frac{y}{x} + \text{Arc tg}\,\frac{x}{y} = \varepsilon\frac{\pi}{2}$, $\varepsilon = \pm 1$, du signe de $\frac{y}{x}$, on retrouve bien

$$f(x, y) = C + \text{Arc tg}\,\frac{x}{y}.$$

La discontinuité n'apparaît pas sous la forme $F = -\theta + C_1$, cette anomalie apparente tient au fait que, malgré son caractère usuel, le changement de variables $(x, y) \to (\rho, \theta)$ n'est pas bijectif (voir tome II, courbes définies en coordonnées polaires).

■ **10.** Vérifier que la forme différentielle $\omega = y^2z\,\mathrm{d}x + 2xyz\,\mathrm{d}y - 2xy^2\,\mathrm{d}z$ n'est pas une différentielle exacte; trouver pour ω un facteur intégrant de la forme $\varphi(z)$, (fonction de z seul), et tel que $\varphi(1) = 1$, puis intégrer la différentielle exacte ainsi définie.

Ici $\omega = P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$, ω est une différentielle exacte si et seulement si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Or

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2\,yz = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

mais $\dfrac{\partial P}{\partial z} = y^2$ et $\dfrac{\partial R}{\partial x} = -\,2\,y^2$, donc ω n'est pas une différentielle exacte.

Soit $\omega_1 = \omega \cdot \varphi(z) = P_1\,dx + Q_1\,dy + R_1\,dz$, avec

$$P_1 = yz\,\varphi(z), \qquad Q_1 = 2\,xyz\,\varphi(z), \qquad R_1 = -\,2\,xy^2\,\varphi(z)$$

Écrivons

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} : 2\,yz\,\varphi(z) = 2\,yz\,\varphi(z), \text{ ne nous apprend rien}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = \frac{\partial R_1}{\partial x} : y^2\,\varphi(z) + y^2 z\,\varphi'(z) = -\,2\,y^2\,\varphi(z),$$

soit
$$z\,\varphi'(z) + 3\,\varphi(z) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial z} = \frac{\partial R_1}{\partial y} : 2\,xy\,\varphi(z) + 2\,xyz\,\varphi'(z) = -\,4\,xy\,\varphi(z) \Leftrightarrow (1)$$

La seule condition est donc

$$z\,\varphi'(z) = -\,3\,\varphi(z), \frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{3}{z},$$

soit en intégrant

$$\ln|\varphi| = -\,3\,\mathrm{Log}|z| + C, \quad \varphi = \lambda z^{-3}, \qquad (\lambda \text{ réel})$$

$\varphi(1) = 1$ montre que $C = 0$, $\lambda = 1$, d'où $\varphi(z) = \dfrac{1}{z^3}$. On obtient ainsi

$$\omega_1 = \frac{y^2}{z^2}\,dx + \frac{2\,xy}{z^2}\,dy - \frac{2\,xy^2}{z^3}\,dz = df,$$

f est donc définie par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{z^2} & \Rightarrow f = \dfrac{xy^2}{z^2} + \varphi(y, z) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2\,xy}{z^2} & \Rightarrow \dfrac{2\,xy}{z^2} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{2\,xy}{z^2}, \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = -\,\dfrac{2\,xy^2}{z^2} & \varphi(y, z) = g(z) \end{cases}$$

La dernière équation, où $f = \dfrac{xy^2}{z^2} + g(z)$, donne $g'(z) = 0$, $g(z) = k$, donc

$$f(x, y, z) = \frac{xy^2}{z^2} + k, \qquad k = \text{constante.}$$

11. On considère, dans un repère orthonormé (Ox, Oy, Oz), les deux droites suivantes : Δ, de vecteur directeur $\vec{u}$ (1, 2, − 1), passant par A (1, 3, 0); Δ', de vecteur directeur $\vec{u'}$ (2, 3, 1), passant par A' (0, 1, 2).

Déterminer la plus courte distance de Δ et Δ' (c'est-à-dire le minimum de la distance MM', M et M' appartenant respectivement à Δ et Δ'). Comparer la direction alors obtenue pour MM' à celles de Δ et Δ'.

Un point M de Δ peut être repéré par le paramètre λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$, un point M' de Δ' par le paramètre μ tel que $\overrightarrow{A'M'} = \mu\vec{u'}$.

En prenant pour chacune de ces relations vectorielles les composantes scalaires suivant Ox, Oy, Oz, on aura, les coordonnées de M étant x, y, z, celles de M' étant x', y', z' :

$$M\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \qquad M'\begin{cases} x' = 2\mu \\ y' = 1 + 3\mu \\ z' = 2 + \mu \end{cases}$$

$$MM'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = (1 + \lambda - 2\mu)^2 + (2 + 2\lambda - 3\mu)^2 + (2 + \lambda + \mu)^2 = f(\lambda, \mu)$$

Exprimons les conditions nécessaires de l'extremum :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0 \tag{1}$$

Soit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = \quad 2(1 + \lambda - 2\mu) + 4(2 + 2\lambda - 3\mu) + 2(2 + \lambda + \mu) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \mu} = -4(1 + \lambda - 2\mu) - 6(2 + 2\lambda - 3\mu) + 2(2 + \lambda + \mu) = 0 \end{cases}$$

et après réduction

$$\begin{cases} 6\lambda - 7\mu + 7 = 0 \\ 7\lambda - 14\mu + 6 = 0 \end{cases}$$

qui donne la solution unique

$$\lambda_0 = -\frac{8}{5}, \quad \mu_0 = -\frac{13}{35}$$

On peut vérifier que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = r, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \mu} = s, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} = t$$

satisfont, en ce point (et d'ailleurs en tout point, puisque ce sont des constantes $r = 12$, $s = -14$, $t = 28$) à la condition suffisante $rt - s^2 > 0$, et que $r > 0$, on a donc bien un minimum de MM'^2 pour les valeurs λ_0 et μ_0. En fait − et

cette circonstance se produit souvent – cette vérification n'est ici pas nécessaire, car $f(\lambda, \mu)$ est continue et minorée (puisque positive), elle admet donc forcément un minimum, et l'unicité du couple (λ_0, μ_0) satisfaisant à (1) ne laisse pas d'ambiguïté.

Les points obtenus sur Δ et Δ' sont

$$M_0\left(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{8}{5}\right), \qquad M'_0\left(-\frac{26}{35}, -\frac{4}{35}, \frac{57}{35}\right).$$

Leur distance, c'est-à-dire la plus courte distance des deux droites, est

$$d = \sqrt{f(\lambda_0, \mu_0)} = \frac{1}{\sqrt{35}}$$

Le vecteur $\overrightarrow{M_0M'_0}\left(-\frac{1}{7}, \frac{3}{35}, \frac{1}{35}\right)$, colinéaire à $(-5, 3, 1)$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}$ $(1, 2, -1)$ et au vecteur $\vec{u'}$ $(2, 3, 1)$ (produits scalaires nuls).

Ainsi la plus courte distance de Δ et Δ' est réalisée lorsque MM' est perpendiculaire commune à Δ et Δ'.

Ce résultat, classique, est facile à généraliser : soit

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}, \quad \overrightarrow{A'M'} = \mu\vec{u'}, \quad f(\lambda, \mu) = \overrightarrow{MM'}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M'})^2 =$$
$$= (-\lambda\vec{u} + \mu\vec{u'} + \overrightarrow{AA'})^2$$

En admettant (voir tome II) la dérivation d'un produit scalaire,

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 2(-\lambda\vec{u} + \mu\vec{u'} + \overrightarrow{AA'}).(-\vec{u}) = -2\vec{u}.\overrightarrow{MM'},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = 2(-\lambda\vec{u} + \mu\vec{u'} + \overrightarrow{AA'}).\vec{u'} = 2\vec{u'}.\overrightarrow{MM'},$$

les conditions nécessaires du minimum équivalent à $\overrightarrow{MM'}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{u'}$.

■ **12.** Étudier les extrema possibles de $f(x, y) = x^2y^3(3x + 2y + 1)$, x, y étant réels.

Exprimons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3(3x + 2y + 1) + 3x^2y^3 = 0, \quad xy^3(9x + 4y + 2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2(3x + 2y + 1) + 2x^2y^3 = 0, \quad x^2y^2(9x + 8y + 3) = 0$$

Les solutions sont $x = 0$, $y \in \mathbb{R}$; $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$; $x = -\frac{1}{9}$, $y = -\frac{1}{4}$.

Ici f n'est ni majorée ni minorée, il faut donc étudier $rt - s^2$ aux points trouvés :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^3 (9x + 4y + 2) + 9xy^3 = 2(9x + 2y + 1) y^3$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2xy^2 (9x + 8y + 3) + 9x^2y^2 = xy^2 (27x + 16y + 6)$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2y (9x + 8y + 3) + 8x^2y^2 = 2x^2y (9x + 12y + 3)$$

$18x^3y + 16x^2y^2 + 6x^2y + 8x^2y^2$

a) Pour $x = 0$ ou $y = 0$, $rt - s^2 = 0$, il n'y a donc a priori pas nécessairement extremum. Cependant $f(0, y_0) = 0$, et si $y_0 \neq 0$ et $\neq -\frac{1}{2}$, $f(x, y)$ garde un signe constant (celui de $y_0^3 (2y + 1)$) quand $x \to 0$. Il y a donc extremum en un tel point : minimum si $y_0 (2y_0 + 1) > 0$, c'est-à-dire $y_0 < -\frac{1}{2}$ ou $y_0 > 0$; maximum si $y_0 (2y_0 + 1) < 0$, c'est-à-dire $y_0 \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.

Par contre en $(0, 0)$, $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, $(x_0, 0)$, il n'y a pas extremum car f est nulle en ces points et peut prendre en leur voisinage des signes quelconques.

b) Pour $x = -\frac{1}{9}$, $y = -\frac{1}{4}$, $r = +\frac{1}{4^3}$, $s = \frac{1}{9 \cdot 4^2}$, $t = \frac{1}{2 \cdot 9^2}$,

$$rt - s^2 = \frac{1}{2 \cdot 4^3 \cdot 9^2} - \frac{1}{4^4 \cdot 9^2} = \frac{1}{4^4 \cdot 9^2} > 0, \text{ et } r > 0,$$

f est minimum, ce minimum vaut

$$f\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{31\,104} \simeq -3.21.10^{-5}$$

■ **13.** 1° *a*) Soit la forme différentielle à deux variables

$$\omega = x(x^2 + 3y^2)\,dx + y(y^2 - x^2)\,dy$$

- vérifier que ω n'est pas intégrable,
- trouver pour ω un facteur intégrant de la forme

$$\varphi(u), \quad \text{avec} \quad u = x^2 + y^2, \quad \text{et} \quad \varphi(1) = 1.$$

b) Intégrer la différentielle totale $\omega \cdot \varphi(u)$ ainsi obtenue, en passant en coordonnées polaires ($x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$).

2° Dans ce qui suit, on appelle fonction homogène de deux variables x et y, de degré α (réel donné), toute fonction f telle que,

$$\forall t > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{D} \text{ (domaine de définition de } f),$$

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y) \tag{1}$$

f est supposée dérivable sur $\mathbb{D}$.

a) En dérivant (1) par rapport à t, montrer que, si f est homogène de degré α, on a,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{D},\ x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y) \tag{2}$$

b) On suppose, réciproquement, que f vérifie (2). Montrer que la fonction $\varphi(x, y, t) = t^{-\alpha} f(tx, ty)$ ne dépend pas de t, et en conclure que f est homogène de degré α. Ainsi (2) $\Leftrightarrow$ f homogène de degré α.

c) $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ étant supposées homogènes de même degré α (c'est-à-dire vérifiant (2)), montrer que $\dfrac{P\,dx + Q\,dy}{Px + Qy}$ est une différentielle exacte. Retrouver ainsi, comme cas particulier, le résultat du (1°, *a*).

1° *a*) • $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, ω n'est pas intégrable.

• Si $P_1 = x(x^2 + 3y^2)\,\varphi(u)$, $Q_1 = y(y^2 - x^2)\,\varphi(u)$, avec $u = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} \Leftrightarrow 6xy\,\varphi(u) + x(x^2 + 3y^2)\,\varphi'(u) \cdot 2y = -2xy\,\varphi(u) + y(y^2 - x^2)\,\varphi'(u) \cdot 2x$$

$$8xy\,\varphi(u) + 2xy(2x^2 + 2y^2)\,\varphi'(u) = 0, \quad u\,\varphi'(u) + 2\varphi(u) = 0,$$

soit $\dfrac{\varphi'}{\varphi} = -\dfrac{2}{u}$, $\ln|\varphi| = -2\,\mathrm{Log}|u| + \mathrm{Log}|\lambda|$, $\varphi = \dfrac{\lambda}{u^2}$,

et la condition $\varphi(1) = 1$ donne $\lambda = 1$, c'est-à-dire $\varphi(u) = \dfrac{1}{u^2}$.

b) $\omega\varphi(u) = \dfrac{x(x^2 + 3y^2)\,dx + y(y^2 - x^2)\,dy}{(x^2 + y^2)^2} = \omega_1$ est une différentielle exacte.

Pour chercher $f(x, y)$ telle que $df = \omega_1$, passons en coordonnées polaires :

$$\omega_1 = \frac{1}{\rho^4}[\rho\cos\theta \cdot \rho^2(\cos^2\theta + 3\sin^2\theta)(\cos\theta \cdot d\rho - \rho\sin\theta\,d\theta) + \rho\sin\theta(\sin^2\theta - \cos^2\theta)(\sin\theta\,d\rho + \rho\cos\theta\,d\theta)]$$

$$= \frac{1}{\rho}[(\cos^4\theta + 2\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta + \sin^4\theta)\,d\rho + (-2\sin\theta\cos^3\theta - 2\sin^3\theta\cos\theta)\,\rho\,d\theta]$$

$$= \frac{1}{\rho}(d\rho - \sin 2\theta \cdot \rho\,d\theta) = \frac{d\rho}{\rho} - \sin 2\theta \cdot d\theta = dF(\rho, \theta),$$

$$F = \mathrm{Log}|\rho| + \frac{1}{2}\cos 2\theta + C = \mathrm{Log}|\rho| + \frac{1}{2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + C,$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Log}(x^2 + y^2) + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right] + C$$

2° *a*) Posons $tx = u$, $ty = v$, et dérivons $f(u, v) = t^\alpha f(x, y)$ par rapport à t, il vient

$$\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = \alpha t^{\alpha - 1} f(x, y)$$

soit

$$\frac{\partial f}{\partial u} x + \frac{\partial f}{\partial v} y = \alpha t^{\alpha - 1} f(x, y),$$

et en multipliant par t :

$$u \frac{\partial f}{\partial u} + v \frac{\partial f}{\partial v} = \alpha t^\alpha f(x, y) = \alpha f(u, v)$$

Par changement de notation,

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f(x, y) \tag{2}$$

b) Soit $\varphi(x, y, t) = t^{-\alpha} f(u, v)$, $u = tx$, $v = ty$.

Calculons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\alpha t^{-\alpha - 1} f(u, v) + t^{-\alpha} \left(x \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

$$= t^{-\alpha - 1} \left[-\alpha f(u, v) + u \frac{\partial f}{\partial u} + v \frac{\partial f}{\partial v} \right] = 0,$$

donc φ ne dépend pas de t, $\varphi(x, y, t) = \varphi(x, y, 1) = f(x, y)$, et on a bien

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y),$$

f est homogène de degré α.

La relation (2) caractérise donc les fonctions homogènes de degré α : c'est le « théorème d'Euler ».

c) Il s'agit d'établir que si

$$A(x, y) = \frac{P}{Px + Qy}, \qquad B(x, y) = \frac{Q}{Px + Qy},$$

P et Q étant homogènes de même degré α, on a $\dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial B}{\partial x}$.

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{1}{(Px + Qy)^2} \left[\frac{\partial P}{\partial y} (Px + Qy) - P \left(x \frac{\partial P}{\partial y} + Q + y \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right] = \frac{C}{(Px + Qy)^2}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{1}{(Px + Qy)^2} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} (Px + Qy) - Q \left(P + x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right] = \frac{D}{(Px + Qy)^2}$$

Formons

$$C - D = xP\frac{\partial P}{\partial y} + yQ\frac{\partial P}{\partial y} - xP\frac{\partial P}{\partial y} - PQ - yP\frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$- xP\frac{\partial Q}{\partial x} - yQ\frac{\partial Q}{\partial x} + PQ + xQ\frac{\partial P}{\partial x} + yQ\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$= Q\left(y\frac{\partial P}{\partial y} + x\frac{\partial P}{\partial x}\right) - P\left(y\frac{\partial Q}{\partial y} + x\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\,.\,\alpha P - P\,.\,\alpha Q = 0$$

d'où le résultat demandé.

Autrement dit si P et Q sont homogènes de même degré, $\dfrac{1}{Px + Qy}$ est un facteur intégrant de $P\,dx + Q\,dy$. Dans 1°, *a*), P et Q sont homogènes de degré 3,

$$Px + Qy = x^2(x^2 + 3y^2) + y^2(y^2 - x^2) = (x^2 + y^2)^2,$$

on retrouve le facteur intégrant

$$\varphi(u) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$$

■ **14.** Soit $y = \varphi(x)$ fonction implicite de x définie par $f(x, y) = 0$, la fonction f étant deux fois dérivable sur un domaine $\mathbb{D}$; on adopte les notations de Monge

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t,$$

et on suppose $q \neq 0$. Calculer $\varphi''(x)$ en fonction de p, q, r, s, t.

$$f\,[x, \varphi(x)] = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0, \frac{dy}{dx} = y' = -\frac{p}{q}$$

Il en résulte

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{q}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$y'' = \varphi''(x) = -\frac{rq - ps}{q^2} - \frac{sq - pt}{q^2}\left(-\frac{p}{q}\right) = \frac{-rq^2 + pqs + pqs - tp^2}{q^3},$$

soit

$$\varphi''(x) = \frac{2pqs - rq^2 - tp^2}{q^3}$$

Il en résulte que les points d'inflexion de la courbe $f(x, y) = 0$ satisfont au système $f = 0, 2pqs - rq^2 - tp^2 = 0$ (d'utilisation pratique peu commode).

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

15. Soit $z = e^{\varphi(x,y)}$, φ étant deux fois dérivables. Calculer $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. En déduire toutes les fonctions φ telles que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

Réponse : $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z\left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$

La solution la plus générale de (1) est $\varphi = \operatorname{Log} | f(x) + g(y) |$.

16. Déterminer, à l'aide du changement de variable $x + y = u$, $xy = v$, les fonctions $z(x, y)$ telles que $x \dfrac{\partial z}{\partial x} - y \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 - y^2$.

Réponse : $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2} + \varphi(xy)$.

17. Une boîte en forme de parallélépipède rectangle, sans couvercle, a une surface totale égale à S. Trouver ses dimensions pour que son volume soit maximum.

Réponse : z étant la hauteur, x, y les dimensions de la base, on a

$$z = \frac{S - xy}{2(x + y)}$$

le volume

$$V = \frac{xy(S - xy)}{2(x + y)}$$

est maximum pour

$$x = y = \sqrt{\frac{S}{3}}, \qquad z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3}},$$

ce maximum est $V_m = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$.

18. Problème de l'« extremum lié » : démontrer que des conditions nécessaires pour que $f(x, y, z)$ soit extremum lorsque x, y, z sont liés par $g(x, y, z) = 0$ peuvent s'écrire $\dfrac{f'_x}{g'_x} = \dfrac{f'_y}{g'_y} = \dfrac{f'_z}{g'_z}$. En déduire le maximum du produit des distances d'un point M, intérieur à un triangle de côtés a, b, c, aux côtés de ce triangle, et retrouver le résultat de l'exercice 17.

Réponse : z est une fonction implicite $\varphi(x, y)$ définie par

$$g[x, y, \varphi(x, y)] = 0 \qquad (1)$$

on dérive (1), on obtient $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, que l'on reporte dans $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

S étant l'aire du triangle, $ax + by + cz = 2S$, il en résulte les conditions $\frac{yz}{a} = \frac{zx}{b} = \frac{xy}{c}$, soit $ax = by = cz$, M est le centre de gravité du triangle, et le maximum est $\frac{8\,s^3}{27\,abc}$.

Dans l'exercice 17, la même méthode donne

$$\frac{yz}{y + 2z} = \frac{xz}{x + 2z} = \frac{xy}{2(x + y)},$$

d'où $x = y = 2z = \sqrt{\frac{S}{3}}$, on retrouve le résultat du n° 17.

19. Trouver les fonctions $f(x, y, z) = \varphi(r)$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Réponse : Cette expression, notée Δf, est appelée laplacien de f, et les fonctions f telles que $\Delta f = 0$ sont les fonctions harmoniques. On cherche donc les fonctions harmoniques du point $M(x, y, z)$ ne dépendant que de la distance OM. On trouve

$$\Delta f = \varphi''(r) + \frac{2}{r}\varphi'(r) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\varphi''}{\varphi'} = -\frac{2}{r},$$

$$\operatorname{Log}|\varphi'| = \operatorname{Log}\frac{1}{r^2} + \operatorname{Log}|k|, \quad \varphi' = \frac{k}{r^2}, \quad \varphi = -\frac{k}{r} + \lambda = \frac{a}{r} + \lambda$$

20. Dans ce qui suit, on dit que deux fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont conjuguées si les deux formes différentielles $\omega_1 = P\,dx - Q\,dy$, $\omega_2 = Q\,dx + P\,dy$ sont des différentielles exactes. P et Q sont supposées dérivables, sur un même domaine $\mathbb{D}$, à l'ordre 2, leurs dérivées partielles étant continues.

1° Quelles relations doivent vérifier P et Q ? Montrer que P et Q sont des fonctions harmoniques (*cf.* exercice 19).

2° Soit $Q(x, y) = \operatorname{sh} x \sin y$

a) vérifier que Q est harmonique,

b) déterminer P, conjuguée de Q, telle que $P(0, 0) = 1$.

3° Trouver tous les couples de fonctions $f(x)$ et $g(y)$ tels que la fonction $Q(x,y) = f(x)\,g(y)$ soit harmonique. Retrouver, comme cas particulier, la fonction $Q(x,y)$ du 2°.

4° P et Q étant toujours des fonctions conjuguées, démontrer que

$$\frac{P\,dx + Q\,dy}{P^2 + Q^2} \quad \text{et} \quad \frac{Q\,dx - P\,dy}{P^2 + Q^2}$$

sont des différentielles exactes.

5° Trouver un facteur intégrant de $\text{ch}x \cos y\,dx + \text{sh}\,x \sin y\,dy$ et intégrer la différentielle totale obtenue.

Réponses : 1° $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial x}$, d'où

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = 0, \text{ de même } \Delta Q = 0.$$

2° *a*) Immédiat; *b*) $P(x, y) = \text{ch}\,x \cos y$.

3° Il faut $\dfrac{f''(x)}{f(x)} = -\dfrac{g''(y)}{g(y)} = k$, constante (car indépendante de x et y).

$k > 0$, $k = \omega^2 \Rightarrow Q = (Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x})(C \sin \omega y + D \cos \omega y)$;

$k < 0$, $k = -\omega^2$, échange de x et y

$$k = 0, Q = (Ax + B)(Cy + D).$$

Le 2° correspond à

$$k = 1, \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = 1, \quad D = 0.$$

4° Calcul simple $\Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{P}{P^2 + Q^2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{Q}{P^2 + Q^2}\right)$.

5° Facteur intégrant

$$\frac{1}{\text{ch}^2 x \cos^2 y + \text{ch}^2 x \sin^2 y} = \frac{1}{\text{sh}^2 x + \cos^2 y},$$

intégrale $f = \text{Arc tg}\,\dfrac{\text{sh}\,x}{\cos y} + C$.

7195 - Imprimerie Bayeusaine, 6-12, rue Royale, 14401 Bayeux
Dépôt légal n° 5925 – février 1985
Imprimé en France

L'enseignement des Mathématiques a beaucoup évolué durant les deux dernières décennies. Un formalisme plus rigoureux, des concepts plus généraux et de ce fait souvent plus abstraits se sont imposés. Il demeure cependant un domaine où une attention toute particulière doit être apportée à la pédagogie des mathématiques, c'est celui des enseignements à finalité technique. Dans de tels cas, l'axiomatique rigoureuse, le concept général et abstrait cèdent nécessairement le pas au souci de doter l'élève des moyens utiles à faire rapidement usage d'un certain nombre « d'outils mathématiques » lui permettant d'appréhender, par le biais de modèles appropriés, les notions techniques qui constituent l'essentiel de sa formation. Aussi les auteurs ont-ils opté pour un formalisme restreint, sans pour autant prendre des libertés quant à la rigueur.

Ce volume reprend les notions de base d'Analyse acquises en terminale, qu'il complète et développe concernant les fonctions d'une variable réelle et les fonctions transcendantes usuelles. Les chapitres suivants sont consacrés à la notion d'intégrale, aux procédés classiques de recherche de primitives, et enfin à l'extension de la notion d'intégrale. Un dernier chapitre porte sur les fonctions de plusieurs variables.

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants des écoles supérieures techniques, des I.U.T. et aux élèves de certaines écoles d'ingénieurs — celles en particulier pour lesquelles le passage traditionnel par les classes de mathématiques spéciales n'est pas requis — ainsi qu'aux étudiants du premier cycle universitaire.

ISBN : 2-7042-1064-0